碩士學位 請求論文

指導教授 張瓊允

중학생들의 일차방정식 문제유형별 학습곤란도 분석

- 교사의 예상정답률과 중학생들의 정답률의 차이를 중심으로 -

Middle School Students' Problem Solving Abilities and Teachers' Expectation in Linear Equation Problems

2000. 8.

建國大學校 教育大學院

教育學科 數學教育專攻

金 眞 我

金 眞 我의

教育學 碩士學位 請求論文으로 認准함.

審 査 委 員

主　審 ________________ ㊞

副　審 ________________ ㊞

委　員 ________________ ㊞

2000年 6月

建 國 大 學 校　教 育 大 學 院

국 문 요 약

중학생들의 일차방정식 문제유형별 학습곤란도 분석

- 교사의 예상정답률과 중학생들의 정답률의 차이를 중심으로 -

김 진 아

건국대학교 교육대학원 교육학과 수학교육전공

指 導 敎 授　張 瓊 允

방정식은 우리나라 학교 수학의 교육과정에서 큰 비중을 차지하고 있다. 학교 수학의 교육과정에서 방정식이란 용어와 방정식 단원은 초등학교 6학년 1학기에 도입되지만 방정식의 기본적인 개념은 초등학교 1학년 때부터 도입되고 있으며 방정식의 내용은 고등학교 수학Ⅱ과정에 이르기까지 계열화를 이루면서 심화되고 있다. 특히 산술에서 대수로의 이행과정에서 나타나는 대수를 하기 위한 예비단계(Prealgebra)는 매우 중요하다.

따라서 본 연구는 산술에서 대수로 넘어가는 과도기적인 단계인 중학교 1학년의 일차방정식 단원에서 교사가 예상하는 정답률과 학생의 실제 정답률 사이에 차이가 존재하는지 조사하고 만약 차이가 있다면 이는 주로 어떤 문제유형에 관한 것인지 그 문제유형을 분석하고자 한다.

이를 위하여 다음과 같이 연구문제를 설정하였다. (1) 일차방정식의 문제유형에 따라 중학생들의 정답률이 차이가 있는가? (2) 일차방정식에서 교사들이 예상한 중학생들의 정답률이 문제유형에 따라 차이가 있는가? (3) 일차방정식에서 교사가 예상한 정답률과 학생의 실제 정답률 사이에 차이가 있는가? 교사, 학생 모두에게 있어서 정답률이 문제유형별로 차이가 있는가? 또, 정답률에 있어서 교사, 학생과 문제유형 사이에 상호 관련이 있는가? (4) 일차방정

식에서 교사가 예상한 정답률은 근무 연한에 따라 차이가 있는가? 문제유형과 교사의 근무 연한에 따라 교사가 예상한 정답률은 달라지는가?

이 연구문제를 검증하기 위하여 연구문제 1과 연구문제 2는 일원배치 분산분석(one-way ANOVA)을 하였고 연구문제 3은 2×20 이원배치 분산분석(two-way ANOVA)과 t-검정을 하였으며 연구문제 4는 4×20 이원배치 분산분석을 하였다. 이상의 모든 자료 분석은 개인용 컴퓨터의 윈도우용 통계 패키지인 SPSS(Statistical Package for the Social Science)를 이용하여 처리하였다.

본 연구의 결과 (1) 일차방정식의 문제유형에 따라 중학생들의 정답률에는 차이가 있음을 가정할 수 있었다. (2) 일차방정식에서 교사들이 예상한 중학생들의 정답률은 문제유형에 따라 차이가 있음을 가정할 수 있었다. (3) 일차방정식에서 교사가 예상한 정답률과 학생의 실제 정답률은 차이가 있음을 가정할 수 있고, 문제유형에 따라 그리고 교사와 학생이라는 대상에 따라 정답률은 차이가 있음을 가정할 수 있었다. (4) 일차방정식에서 교사가 예상한 정답률은 근무 연한에 따라 차이가 있음을 가정할 수 있었는데 3년 미만의 교사들의 예상정답률이 학생들의 정답률과 가장 근접하였다. 또 문제유형과 교사의 근무 연한에 따라 정답률이 달라짐을 가정할 수 있었다.

본 연구에서는 교사와 학생의 문제유형별 학습곤란도에는 차이가 있음을 가정할 수 있었다. 이는 학생들이 교사가 미처 예상하지 못했던 문제유형에서 어려움을 겪고 있음을 시사하고 있는데 이런 사실을 교사가 인지함으로써 학생들에게 방정식을 지도하는데 참고자료로 활용할 수 있을 것이다.

<제목차례>

<부록>

<표차례>

<그림차례>

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

방정식은 우리나라 학교 수학의 교육과정에서 큰 비중을 차지하고 있다. 학교 수학의 교육과정에서 방정식이란 용어와 방정식 단원은 초등학교 6학년 1학기에 도입되지만 방정식의 기본적인 개념은 초등학교 1학년 때부터 도입되고 있으며 방정식의 내용은 고등학교 수학Ⅱ과정에 이르기까지 계열화를 이루면서 심화되고 있다. 초등학교 수학교과서는 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈과 같은 기본적인 연산을 익히는 내용이 많은 비중을 차지하고 있는데, 이런 사칙연산을 익히는 과정에서 방정식이라는 용어는 사용하고 있지 않지만 방정식의 개념을 찾아볼 수 있다. 그리고, 중학교에서 1, 2차 방정식을, 고등학교에서 3, 4차 방정식과 같은 고차 방정식 등이 도입된다. 방정식의 해의 범위로 계열성에 대한 예를 살펴보면 중학교 1, 2학년에서는 유리수 범위에서 해를 구하고, 고등학교 3학년에서는 무리수가 도입되어 실수 범위에서 해를 구하는 것으로 해의 범위가 확장되며 고등학교에서는 허근의 개념이 소개되면서 복소수 범위에서 해를 구하는 것으로 확장된다.

NCTM(1992)의 『수학교육과정과 평가의 새로운 방향』의 5-8학년의 규준 9(대수)에서는 중학교 수학이 구체물을 사용하는 초등수학과 보다 형식적인 고등학교 수학 사이의 교량역할을 한다고 하면서 특히, 산수에서 대수로의 전이가 대표적인 예라고 하였다. 이처럼 중학교 1학년의 방정식은 산술에서 대수로 넘어가는 과도기적인 단계로 그 중요성이 크다고 할 수 있다.

김성준(1995)은 학교 대수의 학습 과정에서 학생들이 접하게 되는 여러 가지 어려움을 확인하고 그 이유를 고찰하면서 이런 대수 학습에서의 여러가지

어려움이 산술에서 대수로의 이행 과정에 나타나는 장애들을 간과하기 때문에 비롯된다고 가정하였다. 이 가정을 바탕으로 하여 문헌 연구와 조사를 통해 실제 대수 학습의 구체적인 예에 적용을 시도하였다. 그는 대수 학습을 개선시키기 위해 산술에서 충분한 학습이 이루어졌던 여러 경험들이 적절하게 대수의 도입 단계에서 재구성되어야 하며, 구성 과정에서 더욱 고려되어야 할 것은 먼저 학생들의 오개념을 분석하고 그 장애가 되는 요소를 제기하는 수정의 절차 곧 Prealgebra 단계가 필요하다고 하였다.

산술에서 대수로의 이행과정에서 큰 변화 중 하나가 변수인데 변수의 개념 중에서 미지수라는 용어는 현행 학교 수학의 중학교 1학년 방정식 단원에서 처음 도입된다.

대수를 하기 위한 예비단계(Prealgebra)인 초등학교 6학년에서 중학교 2학년의 시기가 중요한 것에 비해 대수를 하기 위한 예비단계(Prealgebra)에서 큰 위치를 차지하는 산술에서 대수로의 전이 과정에서 일어날 수 있는 오개념을 교정하는 것에 관한 연구나 이 과정에서 실제로 나타나고 있는 오류에 관한 방정식에 대한 연구는 부족하다. 기존의 논문들은 주로 방정식의 역사나 학교 교육과정을 통한 방정식의 지도에 관한 연구(이순자(1983) ; 박미령(1987) ; 이창근(1987) ; 김경진(1992) ; 최수현(1997) 등)와 방정식의 문장제에 관한 연구(장영숙(1992) ; 이정은(1998))가 대부분이다. 특히 NCTM에서 수학의 목적 중 하나로 문제해결을 주장하면서 방정식에 관한 연구가 문제해결에서 큰 역할을 하고 있는 문장제 등으로 관심이 전환되었다. 문장제가 문제해결력을 기르는데 큰 역할을 하는 것은 사실이지만 방정식에 대한 기본적인 개념이 정립되지 않았다면 이것은 앞으로 대수를 학습할 학생들에게 많은 장애요인으로 작용할 것이다.

본 연구는 방정식 단원에서 일차 방정식의 문제유형에 대한 중학생들의 실제정답률과 교사가 인지한 예상정답률 사이에 차이가 존재하는지 조사하기

위해 설계되었다. 교사와 학생간의 정답률에 대한 차이가 존재한다면 이는 주로 어떤 문제유형에 관한 것이었는지 찾아보고, 그 문제유형을 분석하여 교사가 학생들이 방정식을 학습하는데 있어 장애가 되는 요인을 인식하고 이를 지도하는데 참고자료로 활용하고자 한다. 본 연구의 결과는 초·중고등학교의 현장에서 방정식 및 기초 대수를 효과적으로 지도하는데 활용될 수 있을 것이다.

2. 연구문제

본 연구의 목적은 일차방정식에서 방정식의 문제유형에 대한 학생들의 실제정답률과 교사가 인지한 예상정답률 사이에 차이가 있는지 조사하여, 만약 차이가 있다면 주로 어떤 문제유형에 관한 것이었는지 찾아보고 그 문제유형을 분석하여 앞으로의 방정식 지도에 있어서 참고자료로 활용하고자 하는 것이다. 이를 위하여 연구문제를 다음과 같이 설정하였다.

1. 일차방정식의 문제유형에 따라 중학생들의 정답률이 차이가 있는가?

2. 일차방정식에서 교사들이 예상한 중학생들의 정답률이 문제유형에 따라 차이가 있는가?

3. 일차방정식에서 교사가 예상한 정답률과 학생의 실제 정답률 사이에 차이가 있는가? 교사, 학생 모두에게 있어서 정답률이 문제유형별로 차이가 있는가? 또, 정답률에 있어서 교사, 학생과 문제유형 사이에 상호 관련이 있는가?

4. 일차방정식에서 교사가 예상한 정답률은 근무 연한에 따라 차이가 있는가? 문제유형과 교사의 근무 연한에 따라 교사가 예상한 정답률은 달라지는가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 대수 학습

NCTM(1992)의 『수학교육과정과 평가의 새로운 방향』에서는 5학년에서 8학년까지의 수학 내용 중 대수 영역에서 변수, 식, 방정식에 대한 이해 그리고, 여러가지 방법으로 일차방정식을 푸는 것에 대한 것을 강화시키고 기호 조작, 절차를 외우고 방정식 풀이를 연습하는 것에 대한 것을 약화시키도록 제시하고 있다.

본 장에서는 변수, 산술에서 대수로의 전이 그리고 방정식에 관한 이론적 배경을 살펴보고자 한다.

(1) 변수 학습

NCTM(1992)의 『수학교육과정과 평가의 새로운 방향』에서는 변수의 개념을 이해하는 것은 대수 학습에 있어 열쇠가 된다고 하면서, 대수 학습에서의 주요 문제는 변수에 대한 좁은 해석에 기인한다고 하였다.

김남희(1997)는 학교 수학에서의 변수 개념 지도의 실태를 확인, 반성하면서 바람직한 변수 개념 지도를 위한 구체적인 지도 방안을 모색하고자 하였다. 이를 위해 교사들의 변수 개념에 대한 이해도 조사와 교과서 분석을 실시하여 변수 개념 지도의 실태에 대한 평가와 반성을 통해 현재의 변수 개념 지도 방식에 대하여 보다 발전적인 대안을 마련해 보는 과정을 행하였는데 조사 대상은 현직교사 194명과 예비교사 139명이었다. 조사 결과 교사들이 변수 개

념을 올바르게 파악하고 있지 않으며 변수 개념을 학생들에게 지도할 때도 그다지 신중을 기하고 있지 않다는 결과가 나왔다. 학생들의 변수 개념 '이해'의 문제를 해결하기 위해서는 먼저 교사의 올바른 개념 이해가 선행되어야 할 뿐만아니라 그들이 학생들에게 변수 개념을 지도하는 방법에 있어서도 개선이 요구된다고 하였다.

김남희는 Fischer의 열린 수학과 Freudenthal의 수학교육 이론에서 주장하는 개념의 역사 발생적 지도방식이 학생들의 바람직한 변수 개념 형성에 효과적일 것임을 가정하고 그러한 지도방식에 입각한 변수 개념 지도의 방향을 제시하였다.

첫째, 실세계의 변하는 대상에 대한 풍부한 경험이 제공되어야 할 필요가 있다.

둘째, 변하는 대상을 수학적으로 처리 가능하도록 문자화해 나가는 단계를 의식화시키는 것이 필요하다.

셋째, 특수에서 일반으로, 일반에서 특수로의 상호 전환 과정이 학습자의 직접적인 경험으로 제공되어야 한다.

넷째, 변수 사용법에 대한 이해를 용이하게 하기 위하여 수학에서 나타나는 문자의 다양한 사용법에 대한 구분을 명확히 하고 그것을 적절한 단계에 따라 순차적으로 도입하는 것이다.

다섯째, 수학에서 변수가 사용되는 각각의 문제 상황에서 그 문맥과 연결되어 변수가 갖는 의미를 상황에 맞는 설명으로 재해석해 줄 필요가 있다.

한인기(1992)는 초등학교에서 배운 문자와 대수에서의 문자는 그 사용 범위가 다르다고 하였다. 가령 초등학교 수학에서는 m, t, l, g 등의 문자를 사용하지만 이것은 각각 미터, 톤, 리터, 그램 등을 나타내는 반면 중학교에서 이러한 문자들은 같은 의미를 갖기도 하지만 그밖의 다양한 의미를 또한 가지게

된다고 하였다. 초등학교와는 달리 중학교 대수에서는 매우 다른 용도로 문자를 도입하므로 학생들은 문자 사용에 대해 상당한 어려움을 가지게 된다. 따라서 문자(변수)를 도입할 때 초등학교에서 이미 학습한 익숙한 많은 예들을 통해 문자(변수)의 의미를 명확하게 학습시키며, 문자(변수)에서의 연산 알고리즘을 암기시키는 것보다는 변수의 다양한 의미와 광범위한 사용이 먼저 선행되어 가르쳐져야 한다고 하였다.

Chalouh와 Herscovics(1988)은 교수 경험에 우선하여, 대수에서 형식적인 교육에 노출되지 않은 학생들에게 어떻게 대수적 상징주의를 인식시킬 것인가 하는 것을 발견하는 것에 흥미를 가져왔는데(Chalouh 와 Herscovics1983) 의미있는 방법으로 대수 표현을 가르치기 위하여 수업을 3단계로 나누었다. 첫 번째는 '자리지기에서 문자표현까지'이었고 두 번째는 '숨겨진 양을 표현하는 문자에서 미지의 양을 표현하는 문자까지'이었으며 세 번째는 '곱셈을 가지는 대수표현들'이었다. 6명의 학생들을 대상으로 하여 수업을 하였다.

3단계 수업을 시작하기 전에 학생들에게 3a가 무엇을 의미하는 지 6명의 학생들에게 물었는데 다양한 대답이 나왔다. 장소 값(예를 들면 3a는 30이다), 첫번째 문자의 생략(예를 들면 3a는 3apples), 그리고 ABC순의 계수("3a는 알파벳의 첫 번째 문자가 a이기 때문에 31이다")처럼 다양하게 해석되었다. 그들은 숫자 2로 3a에 있는 a라는 문자를 대신하면 얻을 수 있는 값은 무엇인가에 대한 물음에 대한 답으로 여섯명 중 5명의 학생이 32라고 대답했다.

3단계 수업을 마치고 한달 후 평가를 하였는데 여섯 명중에서 다섯 명이 예비시험에서 제출했던 것과 유사한 답을 하였다. 우리는 Wendy라는 학생에게 "대수에서" 그녀가 대답하기를 원하는지 물었고 그녀의 요구대로 "대수에서 $5b$가 의미하는 게 뭐지? 하고 물었는데 Wendy, Gail, Filippo 와 Yvette는 그들의 첫 번째 대답을 바꿔서 " 5를 b배한다."라고 말하였다. 즉 b대신 2를

대입하면, 그들은 예전처럼 “52”라고 말하지 않고 이제는 그것을 “5를 2배한다”처럼 읽었다.

(2) 산술에서 대수로의 전이

Wagner & Parker(1995)는 대수에 관한 기존의 연구 결과를 종합하면서 학생들이 형식적인 대수 과정에 들어가기 훨씬 이전에 간단한 방정식을 풀기 시작하지만 산술에서의 등호 사용의 경험이 방정식과 대수식 사이의 구조적인 차이점에 대한 확실한 파악을 방해하기도 한다고 하였다. 방정식 풀이는 좌, 우변시 같게 되는 변수의 값을 찾는 것이라는 사실을 완전히 이해하는 학생들은 별로 없다고 하면서 방정식 개념을 발달시키기 위해서 산술의 항등식을 사용하는 수치적 접근이나 근사해를 찾기 위해 계산기를 사용하는 것은 학생들이 해를 찾기 위한 알고리즘 보다도 방정식의 관계적인인 면에 더 초점을 맞출 수 있도록 도움을 줄 수 있다고 했다. 그리고, 항상 역연산을 사용하는 것 보다도 추론을 사용하는 것이 도움이 될 수도 있다고 하였다. 그리고, 학생들이 대수식을 간단히 하는 것과 방정식을 푸는 것 사이의 혼란이 학생들이 방정식의 우변을 답으로 생각하거나 대수식을 간단히 할 때 자신이 써내려간 식을 방정식으로 보고 그것을 풀어 보면서 x항이 모두 소거가 되는 경우 x가 어떻게 된 것인지 의문을 품게 되는 경우에서 발생한다고 하였다.

김성준(1995)은 산수에서 대수로의 전이에 관하여 고찰하면서 산술에서 대수로의 전이과정에 놓여 있는 학생들은 인지발달면에서 구체적인 조작기와 형식적인 조작기의 경계에 놓여 있으며, 그로부터 비롯되는 불균형 상태는 인지적인 장애를 낳는 원인이 되어진다고 하였다. 그리고, 인지발달 단계에서의 변화와 더불어 언어 형성면에서도 학생들은 보다 추상적인 언어 학습으로의

전환기에 놓여 있으며, 그 개념적인 면에서도 수와 문자간의 전이 시점에 놓여 있다는 것을 고려해야 한다고 하였다.

Kieran(1990)은 산술과 대수는 모두 절차적인 면을 가지고 있으나, 산술 과정에서는 구체적인 수를 계산하여 답을 얻는 절차만을 강조하는 반면, 대수에서는 형식화된 문자와 식을 다루는 구조적인 면을 더 중요시한다고 하였다. 그리고, 산술을 가르치면서 답만을 유도하도록 하는 절차적인 접근은 학생들의 사고가 구조적으로 진행되는데 어려움을 느끼게 한다고 하였다. 대수의 도입 부분에서 문자식의 문제에 수를 대입하여 식의 값을 구한다거나, 방정식의 x에 주어진 집합의 원소를 대입하여 등식이 참이 될 때까지 반복하는 것 등은 대수적인 구조가 아닌 절차적인 면이 강조되는 문제 해결 방법인데 절차의 숙달만으로는 구조적인 지식을 완전하게 습득할 수 없으므로 산술과 대수 학습에서는 절차적인 면과 구조적인 면이 동시에 다루어져야 하고 특히, 대수 준비 학습 과정에서는 절차적인 면으로부터 구조적인 면으로의 전이 과정이 충분히 지도되어야 한다는 것이다. 많은 연구에서 대수를 배우는 학생들은 절차 적인 설명과 개념에 초점을 둔 교수 의미를 이해하는 것이 구조적인 표현에 근거한 교수의 의미를 이해하는 것 보다 훨씬 쉽다고 생각하는 것으로 밝혀졌다.

송영무, 양두례(1997)는 산술에서 대수로의 이행과정에서 나타나는 장애에 관하여 연구하였다. 중학교 1학년 5학급을 대상으로 하여 사전검사를 한 후 장애유형별 지도를 하여 사후 학업 성취도 검사를 실시하였다. 사전검사 결과에서 방정식 오류요인으로 등식의 동치관계를 나타낼 때 등식과 등식 사이에 '='를 사용한 경우가 있었다. 장애 유형별 지도를 한 다음 사후 학업 성취도 검사를 실시한 결과 실험반과 비교반의 평균 차이에 대한 t-검정에서 $p<0.05$

수준에서 유의미한 차이가 나타나지 않았으나 하위권 학생 10명을 제외한 자료에 대해서는 유의미한 차이가 있었다. 즉, 성적이 저조한 학생에게는 장애에 대한 수정 방법이 큰 효과가 없었으나 그 학생들을 제외한 학생들에게는 효과가 있다는 결과가 나왔다.

(3) 방정식 풀이 과정에서의 오류

류한영(1999)은 중학교 3학년 학생 100명과 고등학교 1학년 학생 100명을 대상으로 하여 방정식에 관한 문제를 푸는 과정에서 나타나는 오류의 유형과 오류의 연관성을 분석하였다. 문제풀이 과정을 통하여 나타나는 오류를 기본지식의 결여에서 오는 오류(A), 조건을 잘 이용하지 못하는 오류(B), 등식의 미숙에 따른 오류(C), 애매한 오류(D), 실수나 부주의로 인한 오류(E)로 나누었는데 기본 지식의 결여에 따른 오류(A)가 17.15%로 가장 많이 나타났고, 실수나 부주의한 경우인 E형 오류가 14%로 나타났다.

정답률은 중학생보다는 고등학생이 높았지만, 중학교 때에 이미 갖고 있는 오류가 고등학교에서도 쉽게 교정되지 않는 것으로 나타났다. 문항에 따라서는 중학생들이 고등학생에 비해 오답율이 적은 것으로 나타났는데 이런 문항을 살펴보면 단순한 방정식의 활용에 관한 문제로 방정식의 기본지식에 관한 문제이었다. 대부분의 학생들은 방정식에 관한 완전한 개념을 갖고 있지 않은 것으로 나타났다.

Kieran(1988)은 13살인 7학년 학생들 6명을 대상으로 3달 동안 교수실험을 한 결과 대수 학습의 초기에 방정식과 방정식 해결에 대한 서로 다른 두 가지 대수적 접근이 존재한다는 것을 발견하였다. 산술적 접근과 대수적 접근인데 산술적 접근은 주어진 연산들에 초점을 맞추는 것으로 이것은 대입하여

시행착오와 같은 해결 과정을 사용하는 것이고, 대수적 접근은 주어진 연산들의 역에 초점을 두는데 다른 쪽으로 이항하는 방정식 풀이 과정이 특징이다. 이 연구에 참여한 학생들은 아직 수학 교실에서 대수를 시작하지 않은 상태였는데 방정식에서 문자를 구하기 위해 역연산이 필요하다고 답했던 그룹을 "대수 그룹"이라고 하고, 문자가 수라고 진술한 그룹을 "산술 그룹"이라고 불렀다. 방정식을 풀 때 더 선호하는 풀이방법은 방정식에서 그들이 문자를 보는 방법과 일치하였는데 산술 그룹은 좌항과 우항이 균형을 이루도록 연산을 하였고, 대수 그룹은 연산의 역연산을 사용했고 다른 쪽으로 이항하여 방정식을 풀었다. 그런데 $x+469=1351$에 왼쪽에 10을 더하면 어떻게 되는가? 라고 질문했을 때 산술 그룹은 방정식이 균형을 이루도록 다른 쪽에 10을 더하라고 제안하는 반면 대수 그룹은 다른 쪽에 10을 빼라고 제안하였다. 대수 그룹의 풀이 접근은 기본적으로 오른쪽에 수를 가져가는 것이었는데, 그들은 방정식을 다루기 위해 왼쪽에서 오른쪽으로 이항하는 과정을 과하게 일반화함으로써 오류를 범하였다. 예를 들어 $3a+3+4a=24$ 또는 $2\times c+5=1\times c+8$와 같은 방정식에서 한쪽에 미지수가 두개이거나 등호의 양쪽에 미지수가 포함된 다중연산이 있는 경우 a를 어떻게 구하여야 하는지 물었을 때 매우 어려워하였다. 프로젝트 처음에 대수 그룹에 포함된 이들은 끝까지 계속해서 이항 풀이방법을 사용하는 것을 더 좋아하였고, 산술 그룹에 속했던 이들은 양쪽에 같은 연산을 실행하는 과정을 가르쳤을 때 잘 이해하였으며 프로젝트의 끝까지 이 방법을 사용하였다. 따라서 초등학교에서 이런 과정을 시작할 아이디어가 주어져야 한다는 것을 고려해야 한다고 하였고, 두 접근을 모두 제공하는 교육은 어느 한쪽만을 선택한 교육보다 더 성공적일 것이라고 하였다.

이시연(1998)은 관계적 이해와 도구적 이해에 관한 중학교 수학 1학년 교과서를 연구분석하였다. 그는 일차방정식에서 식세우기 전략이 중요하지만 그

이전에 등식의 성질을 이용하여 식을 계산하는 능력이 선행되어야 한다고 하였다. 교과서의 천칭 그림으로 설명하는 것보다는 직접 천칭을 앞에 두고 천칭이 수평을 이루도록 하기 위한 실행을 해보면서 그 때의 결과를 수학적 식으로 나타내어 등식을 바로 이해하도록 하여 학생들의 관계적 이해를 도와야 한다고 하였다. 이항의 경우 특히 도구적 이해에 그치는 경우가 많은데 그 결과는 등식의 성질($a=b$이면 $a\pm c=b\pm c$)에 의함을 학생들이 이해(관계적 이해)하도록 하여 또다른 문제를 해결하는데 원리를 알고 해결 방법을 찾을 수 있는 힘을 길러주어야 한다고 하였다.

김학구(1984)는 일차방정식의 풀이과정에서 발생하는 오류를 분석하여 이의 교정을 위한 교수-학습 방법을 연구하였다. 중학교 1학년 140명을 대상으로 일차방정식을 1차적으로 지도한 후 평가를 실시해서 정답의 실태와 방정식의 오답의 분류를 통하여 오답의 원인을 분석한 결과 정답률은 53.2%로 오류 내용은 7종류로 분석되었다. 그것은 등식의 성질의 이해가 불충분하기 때문에 오는 오답(38.4%), 이항의 이해가 불충분한 경우(28.0%), 동류항의 간략이 불충분한 경우(25.9%), 식의 변형 과정에서의 오답(39.0%), 배분법칙의 이해가 불충분한 경우(60.5%), 분모를 처리할 때의 오답(69.3%), 소수계수를 정수로 할 때의 오답(75.9%)이었다. 이런 오류를 분석하여 오답의 대책을 세워 다시 2차적으로 지도한 후 평가한 결과 평가 정답률은 67.3%으로 1차 평가에 비해 14.1%가 향상되는 결과를 얻었다.

이창근(1987)은 중등학교 수학교육의 방정식 지도에 관하여 연구하였는데 일차방정식의 해법은 서울시내 중학교 1학년 360명을 대상으로 지도한 후 평가를 실시한 결과 학생들이 범하기 쉬운 오류는 계수와 상수항의 판단, 문자가 있는 식의 의미, 등식의 성질 중 어떠한 경우에 어느 것을 시도하는 가에

대한 판단, 동치변형과 항등변형의 구별 등으로 나타났다.

최영일(1987)은 중등학교 방정식의 해법 과정에서 발생하는 오류를 분석하였는데 수의 계산 능력 부족에 따른 오류, 수치를 대신한 미지수 개념 부족에 따른 오류, 등식의 성질 부족에 따른 오류 등 13가지로 분류하였다. 특히 교사의 잘못된 용어사용에 의한 오류 두 가지에 대한 사례를 들었는데 그것은 다음과 같다.

- 괄호를 '푼다'를 괄호를 '없앤다', '지운다', '벗긴다' 등으로 사용하는 경우가 있는데 이 경우 다음과 같은 오류를 범하는 학생들이 있다.

[사례문제] $4(x+3)=12$의 괄호를 풀고 해를 구하여라

$4x=12-3$

$4x+3=12$

$4x=9$ $\quad\quad\therefore\ x=\frac{9}{4}$

- '이항한다'를 '넘긴다', '보낸다', '옮긴다' 등으로 사용하는 경우

[사례문제] $2x-2=3$에서 상수항을 우변으로 이항하여 해를 구하여라.

$2x-2=3$

$2x=3-2$

$2x=1$ $\quad\quad\therefore x=\frac{1}{2}$

최영일(1987)은 괄호를 푼다는 것을 교사가 괄호를 지운다고 했을 경우에 학생들은 괄호를 푼다는 의미는 잊어버리고 그냥 지워 버리므로 정확하게 용

어를 사용하여야 한다고 하고 이항한다는 것을 교사가 넘긴다고 했을 경우에 학생들 중에 소수의 학생들은 부호와는 상관없이 그대로 옮겨 계산하는 경우가 있기 때문에 교사는 정확하게 '이항한다'고 하여야 한다고 하였다.

박정란(1994)은 일차방정식과 이차방정식의 풀이 과정에서 나타나는 오류 유형을 조사하고 그 지도에 관하여 연구하였다. 여수시내 중학교 1학년 250명을 대상으로 일차방정식을 지도한 후 평가한 결과 문자가 있는 등식의 의미의 이해가 부족하고, 이행하는 과정에서 부호처리가 미흡하고, 등식의 성질을 적용할 수 있는 능력이 부족하고, 동치 변형 또는 항등변형 이해가 부족한 것으로 나타났다.

2. 교사가 학생의 학업성취나 학업곤란에 미치는 영향

조덕주(1992)는 초등학교 5학년 4명을 대상으로 일정한 교수·학습 과정을 거친 후에 그들이 소유하는 의미-인식 내용 및 인식 내용의 구조-를 Benjamin, Duffy등에 의하여 사용된 ordered-tree 방법을 수정, 적용하여 탐구하였다. 그 결과 일정한 교수, 학습 이후 아동이 소유하게 되는 의미 중 인식한 내용은 교사의 수업 내용의 범위에서 크게 벗어나지는 않았으나 인식한 내용의 구조에 있어서는 매우 상이한 정도를 나타낸다는 결과를 얻었다. 아동은 교사의 수업 내용 전체에 초점을 두기보다는 하나 혹은 둘 정도의 개념에 촛점을 두고 자신의 인식 내용을 구조화했으며, 교사의 경우 개념의 정의를 중심으로 수업을 전개하거나 내용을 구조화하고 있으나, 아동의 경우 서로 다른 개념일지라도 일종의 이야기를 전개하는 것처럼 그 개념들을 연관시켜 구조화하였다. 즉 인식한 내용에 있어서 아동들은 교사의 수업 내용이라는 커다란

범위 내에서 자신에게 의미있다고 생각하는 사항을 주로 인식한다는 결과를 얻었다.

Ⅲ. 우리나라 수학 교과서의 일차방정식 지도 계열

본 장에서는 우리나라 6차 교육과정에 따른 초등학교 1학년부터 중학교 1학년까지의 수학 교과서에서 방정식이 어떠한 지도 계열 아래에서 어떤 방법으로 도입되고 있는가를 살펴보고자 한다.

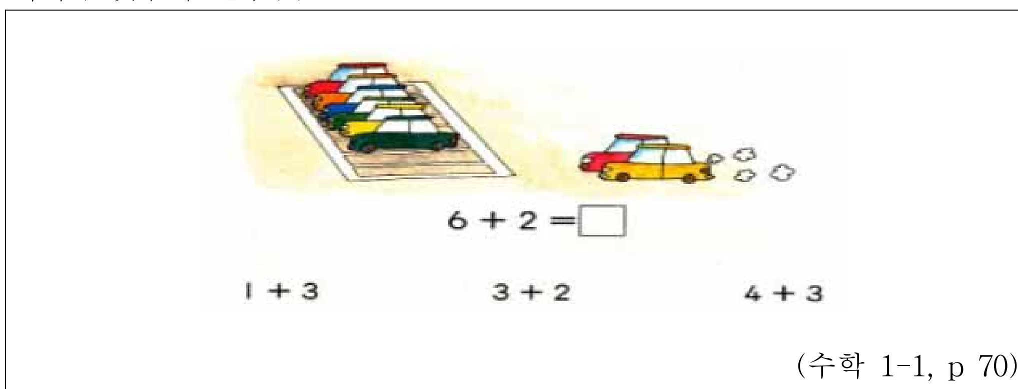
1. 초등학교

(1) 초등학교 1학년

수학 1-1의 덧셈과 뺄셈(1), (2) 영역에서 덧셈과 뺄셈의 계산식이 도입된다. 먼저 그림으로 설명하고 문제풀이를 제시하였는데, 덧셈과 뺄셈(1)에서는 4+2=□ 형태의 문제만 제시되었고 덧셈과 뺄셈(2)에서는 2+□=5 형태의 문제가 첨가되었다.

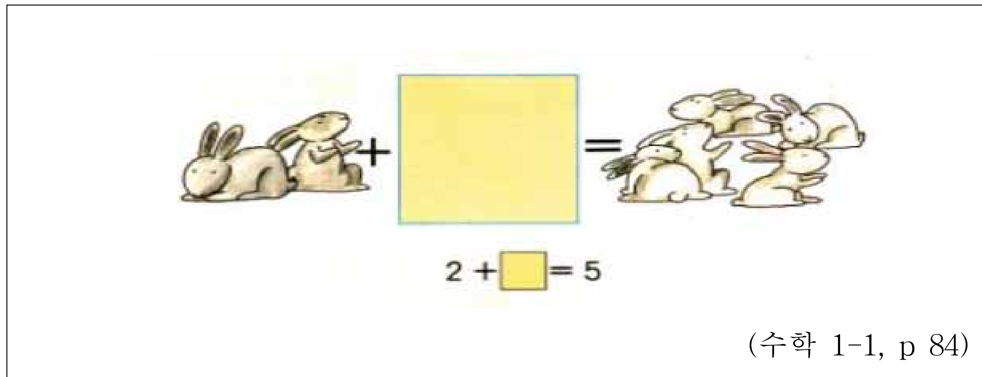
수학 1-2의 덧셈과 뺄셈(1)에서는 한 자리수와 두 자리수의 계산식만 제시되고, 덧셈과 뺄셈(2)에서는 두 자리수끼리의 계산식이 제시되고 있다.

예시1) 덧셈과 뺄셈(1)



(수학 1-1, p 70)

예시2) 덧셈과 뺄셈(2)



(수학 1-1, p 84)

(2) 초등학교 2학년

수학 2-1의 덧셈과 뺄셈(1)에서는 한 자리수와 두 자리수인 세 수에 대한 덧셈과 뺄셈을, 덧셈과 뺄셈(2)에서는 두 자리수인 세 수에 대한 덧셈과 뺄셈을 다루는 것으로 내용이 조금 확장되었고 48-□=32 형태의 문제가 제시되었다. 또, 덧셈과 뺄셈(1)에서는 두 수 사이의 문장제가 제시되었고 식과 답을 모두 쓰도록 하였으며, 덧셈과 뺄셈(2)에서는 세 수 사이의 문장제가 제시되었는데 식이 나오는 과정을 설명하고 있다.

예시1) 덧셈과 뺄셈(1)

수연이는 동화책을 66권 가지고 있습니다. 오늘 5권을 더 샀습니다. 동화책은 모두 몇 권이 되었습니까 ?

○ 무엇을 구하려고 하는지 말하여 보시오.
○ 식을 만들어 계산하여 보시오. 식____________
○ 답은 얼마입니까 ? 답____________
○ 답이 맞았는지 확인하여 보시오.

(수학 2-1, p 15)

예시2) 덧셈과 뺄셈(2)

정은이는 동물 우표를 14장, 식물 우표를 23장 모았습니다. 그 중에서 8장을 친구에게 주었습니다. 남은 우표의 수를 구하는 방법을 알아보시오.

○ 무엇을 구하려고 하는지 말하여 보시오

○ 문제에서 주어진 것을 말하여 보시오.

○ 동물 우표의 수와 식물 우표의 수의 합을 구하는 식을 만드시오.

□ + □

○ 남은 우표의 수를 구하는 식을 만드시오.

□ + □ − □

○ 어떻게 계산하는지 생각하여 보시오.

14 + 23 − 8 = □

(수학 2-1, p 46)

(3) 초등학교 3학년

수학 3-1의 덧셈과 뺄셈 단원에서는 세 자리수에서, 수학 3-2의 덧셈과 뺄셈 단원에서는 네 자리수에서의 덧셈과 뺄셈에 대한 문장제가 소개되고 그 후 덧셈과 뺄셈의 혼합식의 문장제가 제시되었다. 역시 식과 답을 모두 쓰도록 하고 있다(예시1).

수학 3-1의 곱셈 단원에서는 한 자리수와 두 자리수의 곱셈식에 대한 문장제가 제시되고 있다. 이 단원에서는 한 자리수와 두 자리수 간의 계산식도 소개하고 있는데, □를 자리지기의 개념으로 사용하고 있다(예제2). 그런데, 수학 3-1 여러 가지 문제(1) 단원에서는 □를 어떤 수라는 말로 표현하면서 □

를 미지수 개념으로 사용하고 있고, □×3=15 형태의 문장제를 제시하였다(예제3). 수학 3-1 나눗셈 단원에서는 곱셈의 계산식에서와 같이 □를 자리지기 개념으로 사용하고 있고, 52÷4=□ 형태의 문장제가 제시되고 있다. 수학 3-2의 나눗셈 단원에서는 세 자리수 ÷한 자리수 형태의 계산식과 문장제를 제시하였다.

예시1) 덧셈과 뺄셈

학급 문고에는 책이 220권 있었습니다. 이번 주에 빌려 준 책은 126권이고, 돌려받은 책은 98권입니다. 학급 문고에 있는 책은 모두 몇 권입니까? 식__________________ 답_________ (수학 3-1, p. 29)

예시2) 곱셈

곱셈이 맞게 □안에 수를 써 넣으시오. 1□ × 6 7 2 (수학 3-1, p. 45)

예시3) 여러 가지 문제(1)

어떤 수를 알아봅시다. 어떤 수가 있습니다. 이 수의 3배는 15입니다. 식 □×3=15 어떤 수는 _____입니다. (수학 3-1, p. 67)

(4) 초등학교 4학년

여러 가지 문제(1) 단원에서 문장을 식으로 나타내는 문제에 괄호가 도입되었다. 새로 도입된 용어로는 참, 거짓, 등식이 있는데, 참과 거짓에 대한 개념을 먼저 설명한 후에 등식의 개념을 설명하고 있다. 참과 거짓에 대한 개념은 “맞는 문장이나 식을 참이라 하고, 틀린 문장이나 식을 거짓이라 한다”고 설명하고, 등식은 “=가 들어 있는 식”이라고 설명하고 있다. 이 단원에서는 어떤 수 □를 찾는 방법으로 괄호 안에 있는 수를 하나하나씩 □에 넣어봄으로써 참이되는 값을 찾는 문제가 도입되었다.

예시1) 여러 가지 문제(1)

> 말 또는 문장을 식으로 나타내어 보자.
>
> 5와 3의 합에 2를 더한다.
>
> (5 + 3) + 2
>
> (수학 4-1, p. 62)

예시2) 여러 가지 문제(1)

> 다음 등식의 □안에 어떤 수를 넣으면 참이 되는지 (   )안에서 찾아보아라.
>
> 20+□=37   (25, 17, 7)
>
> (수학 4-1, p. 69)

(5) 초등학교 5학년

수학 5-1의 여러 가지 문제(1) 단원에서 “□대신에 기호 x를 사용할 수 있다”라고 하면서 어떤 수를 x로 나타낼 것을 제시하고 있다. 수학 5-1에서 이것을 소개하는 수준이었다면 수학 5-2에서는 ‘문장을 x를 사용한 식으로 나타내어 보자’라는 소단원에서 적극적으로 활용하고 있다. 이때 x는 미지수가 된다. 수학 5-1의 여러가지 문제(1) 단원에서는 문장제 해결을 위한 방법으로 거꾸로 생각하여 풀기를 제시하였고, 수학 5-2의 여러가지 문제(1) 단원에서는 문제를 차례로 생각하여 풀기를 제시하고 있다.

예시1) 여러 가지 문제(1)

거꾸로 생각하여 문제를 풀어 보자. 어떤 수에 5를 더하고 4를 곱하였더니 32가 되었다. 어떤 수는 얼마인지 알아보아라. 계산 과정을 거꾸로 생각하면, • 4를 곱했더니 32가 되었으므로 곱하기 전에는 8이었다. • 어떤 수에 5를 더해서 8이 되었으므로 어떤 수는 3이다. 답이 맞는지 알아보면, $(3+5)\times4=32$ 이므로 맞는 답이다. (수학 5-1, p. 76)

(6) 초등학교 6학년

학교 교육과정에 ‘방정식’이라는 단원이 도입되었고, 항, 미지항, 방정식, 좌변, 우변, 양변, 방정식을 푼다 라는 용어를 소개하고 있다. 용어에 대한 설명은 다음과 같다(수학 6-1, p. 28)

등식 x+20=38에서 x, 20, 38을 각각 이 식의 항이라 하고, x와 같이 그 값을 알 수 없는 항을 미지항이라 한다.

이와 같이 미지항이 들어 있는 등식을 방정식이라 한다.

등식의 성질 4가지가 언어로 소개되고, 구체적인 식에서 성립한다는 것을 제시한 후 등식의 성질을 이용하여 방정식을 풀어 보도록 하고 있다.

예시1) 방정식

등식의 양변에 같은 수를 더하거나 양변에 같은 수를 빼어도 등식은 성립한다.

☆ 등식의 성질을 이용하여 다음 방정식을 풀어보자.

x−3=8

좌변에 x만 남기려면 양변에 얼마를 더해야 하는가?

양변에 3을 더하면,

(x−3)+3=8+□

x=8+□

x=□ (수학 6-1, pp. 31～32)

연습문제에서는 방정식을 만들어 풀어보는 문제를 제시하고 있다.

<u>요약.</u> 지금까지 초등학교 1학년부터 6학년까지의 수학교과서에서 방정식이 어떤 지도계열 아래에서 어떤 방법으로 도입되고 있는지를 살펴보았다. 초등학교 1학년에서는 덧셈과 뺄셈의 계산식을 그림으로 먼저 설명하고 문제를 해결하도록 하였다. 초등학교 2학년에서는 덧셈과 뺄셈에대한 문장제가 제시

되었는데 식과 답을 모두 쓰고 검산하도록 하고 있으며 세 수 사이의 문장제를 제시할 때는 식이 나오는 과정을 자세히 설명하고 있다. 초등학교 3학년에서는 곱셈식에 대한 문장제가 제시되었다. 그런데 곱셈식에서는 예시2에서와 같이 □가 단순히 일의 자리수를 나타낼 뿐이지만, 예시3에서는 □×3=15처럼 □를 어떤 수라고 하여 미지수를 나타낸다. □는 너무나 다른 의미로 사용되고 있음을 알 수 있다. 이것은 학생들이 변수 개념을 이해하는데 장애가 될지도 모른다. 초등학교 4학년에서는 참, 거짓, 등식이라는 용어가 도입되면서 등식이 참이되는 □를 구하도록 하는 문제를 제시하고 있다. 등식이 참이되도록 하기위해 □에 값을 하나씩 대입해 보는 절차식 문제가 도입되고 있다. 초등학교 5학년에서는 □대신 x를 사용할 수 있다고 제시하는데 이때의 x는 미지수이지만 미지수라는 용어를 사용하거나 설명하고 있지는 않다. 문제를 해결하기 위한 방법으로 1학기 때 거꾸로 생각하여 풀기가 먼저 제시되고, 2학기 때 차례로 생각하여 풀기를 제시하고 있다. 초등학교 6학년에서는 처음으로 방정식 단원이 도입되었고 방정식, 항, 미지항, 좌변, 우변, 양변 등의 용어를 소개하고 등식의 성질을 문장으로 소개하고 있다. 언어로 먼저 제시하고 이를 활용하여 방정식을 풀도록 하고 있다. 방정식이란 말은 초등학교 6학년에 처음 사용되지만 초등학교 1학년때 부터 계산식의 형태로 도입되고 있으며, 문장제가 많이 제시되고 있다. 하지만 □의 다양한 사용으로 인하여 학생들이 x에 대한 오개념을 일으킬 가능성이 있다.

2. 중학교

(1) 중학교 1학년

문자와 식 단원에서 '상수항, 계수, 일차식, 동류항'이라는 용어가 도입되었

다.

방정식 단원은 등식의 성질과 일차방정식이라는 두 개의 소단원으로 나누어져 있다.

등식의 성질 단원에서는 미지수, 항등식, 해 또는 근이라는 용어가 새로 도입되었다. 여기서 문자 x를 어떤 수 □ 대신으로 사용할 수 있다라고 설명했던 초등학교 5학년에서와는 달리 문자 x를 미지수라고 하고, 미지수 x의 값을 그 방정식의 해 또는 근이라고 설명하고 있다. 초등학교 6학년에서는 등식의 성질을 언어로 표현하였는데, 중학교 수학1에서는 언어와 함께 문자 a, b, c를 사용하여 구조적인 표현을 함께 제시하였다는 차이점이 있다.

예시1) 방정식

> 등식의 성질
>
> [1] 양변에 같은 수를 더하여도 등식은 성립한다.
>
> a=b이면 a+c=b+c
>
> [2] 양변에서 같은 수를 빼어도 등식은 성립한다.
>
> a=b이면 a-c=b-c
>
> [3] 양변에 같은 수를 곱하여도 등식은 성립한다.
>
> a=b이면 ac=bc
>
> [4] 양변에 0이 아닌 같은 수로 나누어도 등식은 성립한다.
>
> a=b, c $\neq$0이면 $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$
>
> (지학사, p. 112)

일차방정식 단원에서는 이항과 일차방정식이라는 용어가 도입되었는데, 그

내용은 다음과 같다.

> 등식에서 등식의 성질 [1]이나 [2]를 이용하여 등식의 한 변에 있는 항을 부호를 바꾸어 다른 변으로 옮기는 것을 이항이라고 한다.
>
> (지학사, p. 117)
>
> 방정식을 이항하여 정리하였을 때,
>
> (일차식) = 0
>
> 으로 변형되면, 그 방정식을 일차방정식이라고 한다.
>
> (지학사, p. 118)

방정식에서 미지수를 보통 x로 나타내지만 y나 z와 같은 문자로 나타내는 경우도 있다는 것을 명시하고 있다. 다양한 형태의 방정식이 대부분 쉬운 문제에서부터 어려운 문제의 순서로 제시되었다. 괄호가 있는 경우, 계수가 소수나 분수인 경우 방정식을 어떻게 푸는지 예제를 통하여 제시하였고, 이런 일차방정식을 푸는 순서를 정리하여 제시하고 있다. 그리고 일차방정식의 활용에서는 시간・거리・속력에 관한 문제와, 소금물・소금・농도에 관한 문제를 다루고 있다.

예시2) 방정식

> 방정식 $2(3x-2)=5x$를 풀어라.
>
> [풀이] 괄호를 풀면 $6x-4=5x$
>
> 좌변의 -4를 우변으로, 우변의 $5x$를 좌변으로 각각 이항하면
>
> $6x-5x=4$
>
> $\therefore\ x=4$ [답] $x=4$
>
> (지학사, p. 119)

예시3) 방정식

일차방정식을 푸는 순서 1 계수에 소수나 분수가 있으면, 양변에 적당한 수를 곱하여 계수를 정수로 고친다. 2 괄호가 있으면 괄호를 푼다. 3 미지수 x를 포함하는 항은 좌변으로, 상수항은 우변으로 이항한다. 4 양변을 정리하여 x=(수)의 꼴로 고친다. (지학사, p. 121)

<u>**요약.**</u> 초등학교에서 x를 □대신 쓸 수 있다고 도입하여 사용하였는데 중학교 1학년 방정식 단원에서는 x를 미지수라고 칭하고 있고 x의 값을 방정식의 해 또는 근이라고 설명하고 있다. 그리고 등식의 성질의 경우 초등학교에서는 언어로 표현하고 나서 구체적인 예로 사실임을 보인데 반해 중학교에서는 언어로 먼저 설명하고 이와 함께 문자를 사용하여 구조적이고 상징적인 표현을 사용하여 제시하고 있다. 결론적으로 방정식은 초등학교에 비해 계수의 형태나 괄호, 동류항 등에 의해 방정식의 형태가 복잡하고 다양해졌으며 형식적이고 구조적인 방법이 도입되었으며 이의 활용을 강조하고 있다.

Ⅳ. 연구방법 및 절차

1. 도구

본 연구에서 사용된 검사지는 교사용 검사지인 검사지 A와 학생용 검사지인 검사지 B로 두 종류이다. 검사지 A는 일차방정식의 문제유형에 대하여 교사가 인지한 예상정답률을 조사하기 위해, 검사지 B는 일차방정식의 문제유형에 대한 풀이에서 학생들의 실제 정답률을 조사하기 위해 제작되었다. 본 검사지는 교과서 내용을 기초로 하여 본 연구자가 제작하였다.

(1) 교사용 검사지 : 검사지 A

본 교사용 검사지는 교사들을 대상으로 일차방정식에서 교사가 인지한 예상정답률을 조사하기 위하여 제작된 것으로 이하 검사지 A로 칭하기로 한다. 검사지의 각 문제들은 본 연구자가 대체로 교과서의 순서에 따라 유형별로 분류하고 재배열하여 제작하였다. 검사지는 총 20문제으로 구성하였고, 각 문제 유형에 대한 예상정답률(%)을 쓰도록 하였는데 일차방정식의 문제 중 문장제는 제외시켰다.

다음은 검사지 A의 1번 문제를 예시한 것이다.

1) $2x+3=5$	답 : $x=1$ 예상정답률 : ________

그림 4.1 교사용 검사지 문제 (예)

각 문제에 대한 유형별 내용을 간단히 정리하면 다음과 같다.

문제	문 제	유 형
1	$2x+3=5$ 답 : $x=1$	기본형으로 계수가 양의 정수이고 x항이 왼쪽에만 있는 방정식
2	$x+17=-3x+1$ 답 : $x=-4$	기본형에서 계수가 음의 정수인 x항이 오른쪽에 첨가된 방정식
3	$4(x+1)-(3x-5)=0$ 답 : $x=-9$	양의 정수와 음의 정수의 분배법칙이 나오는 방정식
4	$-\frac{1}{3}x+1=2x+\frac{1}{5}$ 답 : $x=\frac{12}{35}$	계수가 분수와 정수인 x항이 양변에 주어졌고 상수도 분수와 정수인 형태로 답도 분수인 방정식
5	$\frac{x+3}{4}=\frac{2}{3}x+2$ 답 : $x=-3$	전체부호가 (+)인 $\frac{(일차식)}{(상수)}$ 형태의 식이 좌변에 하나 포함된 형태로 계수가 분수인 x항이 양변에 주어진 방정식
6	$15=6x-3$ 답 : $x=3$	계수가 양의 정수이고 x항이 오른쪽에만 있는 방정식
7	$8=-2(-4x+16)$ 답 : $x=5$	음의 정수의 분배법칙이 나오는 형태로 x항이 오른쪽에만 있는 방정식
8	$0.1x-0.04=0.16$ 답 : $x=2$	계수와 상수가 모두 소수인 형태로 소수의 자리수가 다르며 x항은 왼쪽에만 있는 형태
9	$\frac{-2x-1}{5}-\frac{-3x+5}{2}=5$ 답 : $x=7$	전체부호가 (+)와 (-)인 $\frac{(일차식)}{(상수)}$ 형태의 방정식 두 개가 혼합된 형태의 방정식
10	$-3x+2=5$ 답 : $x=-1$	계수가 음의 정수이고 x항이 왼쪽에만 있는 방정식
11	$\frac{-2x-4}{4}+\frac{x+5}{3}=1$ 답 : $x=-2$	전체부호가 (+)인 $\frac{(일차식)}{(상수)}$ 형태가 두 개 첨가된 형태로 계수가 분수인 x항이 좌변에만 주어진 방정식
12	$\frac{1}{3}x-2=\frac{1}{5}x+4$ 답 : $x=45$	계수가 분수인 x항이 양변에 존재하는 방정식

13	$-2x+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$ 답 : $x=-\frac{1}{24}$	기본형에서 상수가 분수이고 계수가 음의 정수인 형태로 답이 분수인 형태의 방정식
14	$3(4-3x)=4(3-4x)$ 답 : $x=0$	양의 정수의 분배법칙이 나오는 형태로 풀이과정 중에 $7x=0$이 나오는 방정식
15	$\frac{1}{3}x+2x=14$ 답 : $x=6$	분수 계수와 정수 계수가 혼합된 형태의 방정식
16	$0.9x+1=0.6x+7$ 답 : $x=20$	자리수가 서로 같은 소수계수가 양변에 있고 상수는 정수인 형태의 방정식
17	$-5y+3=13$ 답 : $y=-2$	기본형에서 미지수가 x가 아니고 계수가 음의 정수인 방정식
18	$5+3x=13+7x$ 답 : $x=-2$	양변에 상수가 x항 앞에 더해진 일차식이 있는 방정식으로 상수와 계수 모두 정수인 형태
19	$3x-7=-2(-x+6)$ 답 : $x=-5$	음의 정수의 분배법칙이 우변에 포함된 형태의 방정식
20	$\frac{1}{2}x+4=3x+3$ 답 : $x=\frac{2}{5}$	계수가 분수와 정수인 x항이 양변에 포함되고 상수는 정수이며 답이 분수인 형태

표 4.1 문제유형별 내용

검사를 시작하기 전에 먼저 근무 연한이 어떻게 되는지 표시하도록 하였는데 근무 연한은 3년 미만, 3년 이상~5년 미만, 5년 이상~10년 미만, 10년 이상으로 구성하였다.

교사용 검사지인 검사지 A는 부록 1에 수록하고 있다.

신뢰도를 측정하기 위하여 검사-재검사 신뢰도(test-retest reliability)를 4월 중순에 실시하였다. 35명을 대상으로 한 재검사 신뢰도는 94.13%로 나타났다.

(2) 학생용 검사지 : 검사지 B

검사지 B는 일차방정식 풀이에 대한 학생들의 정답률을 조사하기 위해 제작하였다. 검사지 B의 문제는 검사지 A와 동일하나 각 문제유형에 대한 풀이 과정과 답을 쓰도록 구성하였다. 다음은 검사지 B의 1번 문제를 예시한 것이다.

1. $2x+3=5$

[풀이]

[답]

그림 4.2 학생용 검사지 문제 (예)

학생용 검사지인 검사지 B는 부록 2에 수록하고 있다.

2. 표집 및 자료수집과 분석절차

(1) 교사집단의 표집 및 자료수집

가. 표집

본 연구를 위하여 서울·경기 지역의 중학교에서 수학을 가르치고 있는 현직교사 90명을 검사대상으로 선정하였다.

나. 자료수집 절차

본 검사에서 검사지 A는 서울·경기 지역의 현직교사를 대상으로 2000년 4월 초순에 실시하였다. 검사지 처음 부분에 다음과 같은 지시문을 삽입하였다.

선생님 안녕하십니까? 다음의 검사지는 효과적인 수학 교수 방법을 탐색하기 위한 연구의 일환으로 제작한 것입니다. 이 검사에 의한 자료는 연구의 목적 이외에는 사용하지 않을 것입니다. 바쁘시더라도 최선을 다하여 답해 주시면 감사하겠습니다.

그림 4.3 검사지 A의 지시문

검사지 A에 소용된 시간은 20분이었다.

다. 채점방법

본 연구자는 교사의 근무 연한에 따라 예상정답률에 차이가 있을 것이라는 가정 아래 교사를 다음과 같이 4가지 부류로 나누었다.

① 근무 연한이 3년 미만인 경우

② 근무 연한이 3년 이상 ~ 5년 미만인 경우

③ 근무 연한이 5년 이상 ~ 10년 미만인 경우

④ 근무 연한이 10년 이상인 경우

(2) 학생집단의 표집 및 자료수집

가. 표집

본 연구를 위하여 서울시 송파구에 위치하고 있는 K중학교, 서울시 광진구에 위치하고 있는 K중학교, 경기도 성남시에 위치하고 있는 Y중학교에서

이미 일차방정식에 관하여 학습한 중학교 2학년 학생들 329명을 검사대상으로 선정하였다.

나. 자료수집 절차

본 검사에서 검사지 B는 중학교 2학년 9학급을 대상으로 2000년 4월 초순에 수학교사의 감독 하에 실시하였다. 검사지 처음 부분에 다음과 같은 지시문을 삽입하였다.

> 여러분 안녕하십니까?
>
> 다음의 검사지는 효과적인 수학 교수 방법을 탐색하기 위한 연구의 일환으로 제작한 것입니다. 이 자료는 학교 성적이나 그 밖의 어떠한 평가에도 영향을 주지 않으며, 연구목적 이외에는 절대 사용하지 않을 것임을 약속드립니다.
>
> 할 수 있는 한 최선을 다하여 답해 주시면 감사하겠습니다.

그림 4.4 검사지 B의 지시문

검사지 B에 소용된 시간은 40분이었다.

다. 채점방법

본 연구자는 다음과 같은 기준에 따라 채점하였다.

① 3점 : 정확한 과정을 통해 정답을 구한 경우

② 2점 : 풀이 과정에 오류가 없으나 계산상 답이 틀린 경우

③ 1점 : 풀이 과정이 대체로 바르지 못했으나 해를 구한 경우 또는 풀이 과정 없이 해를 구한 경우

④ 0점 : 풀이를 시도하였으나 답을 구하지 못한 경우, 문제 풀이를 시도

하지 않은 경우

한 문제당 3점으로 하여 총 60점을 만점으로 하였다.

(3) 자료분석절차

본 연구의 연구문제들을 검증하기 위하여 각각 다음과 같은 절차를 적용하여 자료를 분석하였다.

가. 연구문제 1

일차방정식의 문제유형에 따라 중학생들의 정답률이 차이가 있는가?

이 연구문제를 검증하기 위하여 독립 변수를 문제유형으로 하고 종속 변수를 문제유형별 학생들의 실제 정답률로 하여 일원배치 분산분석(one-way ANOVA)을 적용하였다. 일원배치 분석에 대한 사후분석(Post Hoc Multiple Comparisons)으로는 Duncan의 다중 비교(multiple range test)를 사용하였다.

나. 연구문제 2

일차방정식에서 교사들이 예상한 중학생들의 정답률이 문제유형에 따라 차이가 있는가?

이 연구문제를 검증하기 위하여 독립 변수를 문제유형으로 하고, 종속 변수를 교사들의 예상정답률로 하여 일원배치 분산분석을 통하여 분석하였고, 일원배치 분석에 대한 사후분석으로 Duncan의 다중 비교를 사용하였다.

다. 연구문제 3

일차방정식에서 교사가 예상한 정답률과 학생의 실제 정답률 사이에

차이가 있는가? 교사, 학생 모두에게 있어서 정답률이 문제유형별로 차이가 있는가? 또, 정답률에 있어서 교사, 학생과 문제유형 사이에 상호 관련이 있는가?

이 연구문제를 검증하기 위하여 2×20 이원배치 분산분석(two-way ANOVA)을 적용하였다. 이때 종속변수는 정답률(학생의 실제정답률과 교사의 예상정답률을 입력한 변수)로 하고 요인은 대상(2)과 문제(20)로 하였다. 대상(2)은 교사와 학생 2가지이고 문제(20)은 일차방정식의 각 문제유형 20개이다.

다음으로 각 문제유형에 따라 교사, 학생 모두에게 있어서 정답률에 차이가 있는지 검증하기 위해 각 문제에 해당하는 케이스만을 선택하여 독립표본 t-검정하였다.

라. 연구문제 4

일차방정식에서 교사가 예상한 정답률은 근무 연한에 따라 차이가 있는가? 문제유형과 교사의 근무 연한에 따라 교사가 예상한 정답률은 달라지는가?

이 연구문제를 검증하기 위하여 4×20 이원배치 분산분석을 적용하였다. 이 때 종속변수는 교사의 예상정답률로 하고 요인은 근무 연한(4)와 문제(20)으로 하였다. 근무 연한(4)은 교사의 근무 연한에 따라 4가지로 나눈 것으로 근무 연한이 3년미만인 교사, 3년이상-5년미만인 교사, 5년이상-10년미만인 교사, 10년이상인 교사이다. 문제(20)은 일차방정식의 각 문제유형 20개이다.

이상의 모든 자료 분석은 개인용 컴퓨터의 윈도우용 통계 패키지인 SPSS(Statistical Package for the Social Science)를 이용하여 처리하였다.

V. 자료 분석 및 결과

1. 연구문제 검증

(1) 연구문제 1

일차방정식의 문제유형에 따라 중학생들의 정답률이 차이가 있는가?

이 연구문제를 검증하기 위해 일차방정식의 학생용 검사지(검사지 B)를 채점하고 문제유형에 대한 학생들의 정답률을 구하여 일원배치 분산분석 (one-way ANOVA)을 적용하였다. 이 때 독립변수는 문제유형으로 하고 종속변수는 학생들의 실제 정답률로 하였으며, 일원배치 분산분석에 대한 사후분석으로 Duncan의 다중 비교(multiple range test)를 사용하였다.

먼저 표 5.1에서 학생들의 문제유형별 정답률의 평균과 표준편차를 정리하여 제시하였다.

문제	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
평균	82.67	73.25	67.98	42.65	44.17	76.60	67.27	73.15	41.95	73.15
표준편차	34.24	41.33	44.19	46.72	47.86	39.51	45.08	40.22	48.24	41.55
학생수	329	329	329	329	329	329	329	329	329	329
문제	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
평균	46.10	50.76	52.58	52.18	52.58	68.09	73.86	65.75	61.70	47.72
표준편차	48.63	48.63	46.79	45.49	48.71	45.36	41.47	45.71	47.13	48.02
학생수	329	329	329	329	329	329	329	329	329	329
합계	평균 : 60.71, 표준편차 : 46.57, 학생수 : 329									

표 5.1 학생들의 문제유형별 정답률(%)의 평균과 표준편차

위의 표 5.1에서 알 수 있듯이 전체적으로 학생들의 정답률은 평균이 60.71, 표준편차가 46.57로 나타났다. 그리고 문제 1에서 평균 82.67로 최고의 정답률을 보였고 문제 9에서 평균 41.95로 최저의 정답률을 보였다.

일차방정식의 풀이에서 문제유형에 따라 학생들의 정답률에 차이가 있는지 일원배치 분산분석을 적용한 결과는 표 5.2와 같다.

		제곱합	자유도(df)	평균제곱	F	유의확률(p)
문제유형	유형-간	1049197	19	55220.889	27.407	.000
	유형-내	1.3E+07	6560	2014.828		
	합계	1.4E+07	6579			

표 5.2 학생들의 문제유형별 정답률에 대한 분산분석 결과

표5.2에 나타난 바와 같이 $F=27.407(df=19, p<0.05)$로 나타나고 있다. 따라서 유의수준 5% 이내에서 일차방정식 풀이에 대한 학생들의 정답률은 문제유형에 따라 차이가 있음을 가정할 수 있다.

이러한 차이가 일차방정식의 문제유형에 따른 차이에 기인하는지 검토하기 위해 Duncan의 다중비교로 사후분석한 결과는 표 5.3과 같다. 표 5.3에 의하면 20개의 문제는 정답률에 근거하여 8가지 그룹으로 나누어진다는 것을 알 수 있다.

- 첫 번째 그룹 - 문제 4, 문제 5, 문제 9, 문제 11, 문제 20
- 두 번째 그룹 - 문제 5, 문제 11, 문제 12, 문제 20
- 세 번째 그룹 - 문제 11, 문제 12, 문제 13, 문제 14, 문제 15, 문제 20
- 네 번째 그룹 - 문제 3, 문제 7, 문제 16, 문제 18, 문제 19
- 다섯 번째 그룹 - 문제 2, 문제 3, 문제 7, 문제 8, 문제 10, 문제 16,

문제 18

• 여섯 번째 그룹 - 문제 2, 문제 3, 문제 7, 문제 8, 문제 10, 문제 16, 문제 17

• 일곱 번째 그룹 - 문제 2, 문제 6, 문제 8, 문제 10, 문제 17

• 여덟 번째 그룹 - 문제 1, 문제 6

문제	학생수	Subset for alpha = .05							
		1	2	3	4	5	6	7	8
9	329	41.95							
4	329	42.65							
5	329	44.17	44.17						
11	329	46.10	46.10	46.10					
20	329	47.72	47.72	47.72					
12	329		50.76	50.76					
14	329			52.18					
13	329			52.58					
15	329			52.58					
19	329				61.70				
18	329				65.75	65.75			
7	329				67.27	67.27	67.27		
3	329				67.98	67.98	67.98		
16	329				68.09	68.09	68.09		
10	329					73.15	73.15	73.15	
8	329					73.15	73.15	73.15	
2	329					73.25	73.25	73.25	
17	329						73.86	73.86	
6	329							76.60	76.60
1	329								82.67
유의확률		.145	.086	.107	.105	.064	.107	.391	.082

표 5.3 학생들의 문제유형별 정답률에 대한 Duncan의 다중비교 결과

Duncan의 다중비교 결과, 첫 번째, 두 번째, 세 번째 그룹에 속한 문제는 네 번째, 다섯 번째, 여섯 번째, 일곱 번째, 여덟 번째에 그룹에 속한 문제와 유의수준 5% 이내에서 의미있는 차이가 있다고 말할 수 있다. 그리고 각 그

룹 내의 유의확률은 각각 0.145, 0.086, 0.107, 0.105, 0.064, 0.107, 0.391, 0.082로 모두 0.05보다 크므로 각 그룹 내에 있는 문제들 사이에서는 유의수준 5% 이내에서 의미있는 차이가 있다고 볼 수 없다.

(2) 연구문제 2.

일차방정식에서 교사들이 예상한 중학생들의 정답률이 문제유형에 따라 차이가 있는가?

이 연구문제를 검증하기 위하여 독립변수를 문제유형으로 하고 종속변수를 교사들의 예상정답률로 하여 일원배치 분산분석을 적용하였다.

표 5.4은 교사들의 문제유형별 예상정답률의 평균과 표준편차를 표로 정리한 것이다.

문제	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
평균	84.67	74.62	65.81	55.21	51.81	77.73	65.42	60.99	44.48	76.09
표준편차	8.73	11.05	13.70	16.99	18.32	10.44	14.79	14.74	20.87	11.42
교사수	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
문제	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
평균	47.81	54.02	58.20	61.02	61.72	61.10	74.61	72.36	66.27	59.99
표준편차	19.57	16.52	16.16	14.94	13.85	13.92	14.35	12.15	14.03	15.43
교사수	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
합계	평균 : 63.70, 표준편차 : 18.03, 교사수 : 90									

표 5.4 교사들의 문제유형별 예상정답률(%)의 평균과 표준편차

표 5.4에서 알 수 있듯이 문제 1에 대한 예상정답률의 평균이 84.67로 가

장 높았고 문제 9에 대한 예상정답률의 평균이 44.48로 가장 낮았다.

일차방정식의 풀이에서 문제유형에 따라 교사들의 예상정답률에 차이가 있는지 검토하기 위해 일원배치 분산분석을 적용한 결과는 표 5.5와 같다.

		제곱합	자유도	평균제곱	F	유의확률
예상정답률	문제유형-간	190397.5	19	10020.922	45.189	.000
	문제유형-내	394722.9	1780	221.754		
	합계	585120.4	1799			

표 5.5 교사들의 문제유형별 예상정답률에 대한 분산분석 결과

표 5.5에 나타난 바와 같이 일원배치 분산분석한 결과 F=45.189 (df=19, p<0.05)로 나타나고 있다. 따라서 유의수준 5% 이내에서 교사들이 예상한 중학생들의 정답률은 문제유형에 따라 차이가 있음을 가정할 수 있다.

이러한 차이가 일차방정식의 문제유형에 따른 차이에 기인하는지 검토하기 위해 Duncan의 다중비교를 통하여 사후분석한 결과는 표 5.6와 같다. 표 5.6에 의하면 20개의 문제는 정답률에 근거하여 10가지 그룹으로 나누어진다는 것을 알 수 있다.

- 첫 번째 그룹 - 문제 9, 문제 11
- 두 번째 그룹 - 문제 5, 문제 11
- 세 번째 그룹 - 문제 4, 문제 5, 문제 12
- 네 번째 그룹 - 문제 4, 문제 12, 문제 13
- 다섯 번째 그룹 - 문제 8, 문제 13, 문제 14, 문제 15, 문제 16, 문제 20
- 여섯 번째 그룹 - 문제 3, 문제 7, 문제 8, 문제 14, 문제 15, 문제 16
- 일곱 번째 그룹 - 문제 3, 문제 7, 문제 15, 문제 19

• 여덟 번째 그룹 - 문제 2, 문제 10, 문제 17, 문제18

• 아홉 번째 그룹 - 문제 2, 문제 6, 문제 10

• 열 번째 그룹 - 문제 1

문제	교사수	Subset for alpha = .05									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
9	90	44.48									
11	90	47.81	47.81								
5	90		51.81	51.81							
12	90			54.02	54.02						
4	90			55.21	55.21						
13	90				58.20	58.20					
20	90					59.99					
8	90					60.99	60.99				
14	90					61.02	61.02				
16	90					61.10	61.10				
15	90					61.72	61.72	61.72			
7	90						65.42	65.42			
3	90						65.81	65.81			
19	90							66.27			
18	90								72.36		
17	90								74.61	74.61	
2	90								74.62	74.62	
10	90								76.09	76.09	
6	90									77.73	
1	90										84.67
유의확률		.133	.072	.149	.075	.171	.056	.061	.126	.204	1.000

표 5.6 교사들의 문제유형별 정답률에 대한 Duncan의 다중비교 결과

Duncan의 다중비교 결과, 첫 번째～일곱 번째 그룹, 여덟 번째～아홉 번째 그룹, 열 번째 그룹에 속한 문제들 사이에서는 유의수준 5% 이내에서 의미있는 차이가 있다고 말할 수 있다. 그러나 각 그룹 내의 유의확률은 0.133, 0.072, 0.149, 0.075, 0.171, 0.056, 0.061, 0.126, 0.204, 1.000으로 모두 0.05보다 크므로 각 그룹 내에 있는 문제들 사이에서는 유의수준 5% 이내에서 의미있는 차이가 있다고 볼 수 없다.

(3) 연구문제 3.

일차방정식에서 교사가 예상한 정답률과 학생의 실제 정답률 사이에 차이가 있는가? 교사, 학생 모두에게 있어서 정답률이 문제유형별로 차이가 있는가? 또, 정답률에 있어서 교사, 학생과 문제유형 사이에 상호 관련이 있는가?

문제유형별 교사의 예상정답률과 학생의 실제 정답률에 대한 평균 및 표준편차는 앞의 표 5.1과 표 5.4에 정리되어 있다.

본 연구문제를 검증하기위하여 2×20 이원배치 분산분석(two-way ANOVA)을 사용하였다. 이 때 종속변수는 정답률(학생의 실제정답률과 교사의 예상정답률을 입력한 변수)로 하고 요인은 대상(2)과 문제(20)으로 하였다. 다음은 검사 대상(교사, 학생)과 문항(1-20번)을 요인으로 하여 정답률에 대한 2×20 이원배치 분산분석 결과를 나타낸 표이다.

		제곱합	자유도	평균제곱	F	유의확률
주효과	(결합)	713804.6	20	35690.231	21.867	.000
	대상	12614.056	1	12614.056	7.729	.005
	문제	701190.6	19	36904.767	22.611	.000
2원배치상호작용		48539.751	19	2554.724	1.565	.055
모형		1252208	39	32107.909	19.672	.000
잔차		1.4E+07	8340	1632.134		
전체		1.5E+07	8379	1773.983		

표 5.7 교사와 학생의 문제유형별 (예상)정답률에 대한 분산분석 결과

표 5.7에서 나타난 바와 같이 모형의 유의확률은 0.000이므로 정답률에 대한 이원배치 분산분석 모형은 유의수준 5% 이내에서 타당한 것으로 판단할 수 있다. 즉, 이원배치 모형의 종속변수인 정답률의 변화를 두 개의 요인 및

상호작용으로 설명할 수 있다는 결론을 내릴 수 있다.

주요인으로 먼저 대상을 살펴보면 대상의 유의확률은 0.005로 유의수준 5%보다 작으므로 유의수준 5% 이내에서 대상 즉, 교사가 예상한 정답률과 학생의 실제 정답률에는 차이가 있음을 가정할 수 있다. 또한 주요인으로 문제를 살펴보면 유의확률 0.000으로 유의수준 5%보다 작다. 그러므로 문제유형에 따라 정답률에 차이가 있음을 가정할 수 있다.

또, 표 5.7에 의하면 정답률에 관하여 대상과 문제의 상호작용은 F=1.565(df=19, p=0.055)로 0.5에 매우 근사하므로 문제유형별 교사와 학생간의 정답률에 대한 t-검정을 하였다.

다음은 문제유형에 따른 교사가 예상한 정답률과 학생의 실제 정답률에 관하여 독립표본 t-검정한 결과[1])이다.

문제	평균들의 동일성에 대한 t-검정		
	t	자유도(df)	유의확률(양쪽)
1	.949	415.850	.343
2	.535	416.903	.593
3	-.767	411.669	.443
4	4.003	387.806	.000
5	2.336	376.018	.020
6	.466	416.755	.641
7	-.631	405.491	.528
8	-4.492	386.180	.000
9	.734	341.381	.464
10	1.135	416.976	.257
11	.508	361.139	.612
12	1.021	400.481	.308
13	1.817	397.694	.070

1) 모든 문제에 대하여 Levene의 등분산 검정 결과 등분산이 가정되지 않으므로 등분산이 가정되지 않은 부분의 t-검정과 자유도를 정리하였다.

	평균들의 동일성에 대한 t-검정		
문제	t	자유도(df)	유의확률(양쪽)
14	2.987	405.410	.003
15	2.990	416.465	.003
16	-2.409	412.517	.016
17	.274	397.397	.784
18	2.335	416.831	.020
19	1.527	414.596	.128
20	3.949	408.091	.000

표 5.8 문제유형별 교사와 학생의 (예상)정답률을 독립표본 t-검정한 결과

문제 4($-\frac{1}{3}x+1=2x+\frac{1}{5}$)는 표 5.9에 나타난 바와 같이 두 집단에 대한 Levene의 등분산 검정결과 F=405.349, $p<0.05$로 나타났으므로 두 집단간에 분산이 같다고 할 수 없다. 그러므로 등분산이 가정되지 않은 부분의 검정통계량을 사용하면 이때의 유의확률은 0.000으로 유의수준 5%보다 작다. 따라서 유의수준 5%하에서 두 집단간의 차이가 존재한다. 그러므로 문제 4에서는 교사와 학생간의 정답률에 차이가 있음을 가정할 수 있다.

문제 5($\frac{x+3}{4}=\frac{2}{3}x+2$)는 표 5.9에 나타난 바와 같이 두 집단에 대한 Levene의 등분산 검정결과 F=562.30, $p<0.05$로 나타났으므로 두 집단간에 분산이 같다고 할 수 없다. 그러므로 등분산이 가정되지 않은 부분의 검정통계량을 사용하면 이때의 유의확률은 0.020로 유의수준 5%보다 작다. 따라서 유의수준 5%하에서 두 집단간의 차이가 존재한다. 그러므로 문제 5에서는 교사와 학생간의 정답률에 차이가 있음을 가정할 수 있다.

문제 8($0.1x-0.04=0.16$)은 표 5.9에 나타난 바와 같이 두 집단에 대한 Levene의 등분산 검정결과 F=110.531, $p<0.05$로 나타났으므로 두 집단간에 분

산이 같다고 할 수 없다. 그러므로 등분산이 가정되지 않은 부분의 검정통계량을 사용하면 이때의 유의확률은 0.000으로 유의수준 5%보다 작다. 따라서 유의수준 5%하에서 두 집단간의 차이가 존재한다. 그러므로 문제 8에서는 교사와 학생간의 정답률에 차이가 없음을 가정할 수 있다.

문제 14($3(4-3x)=4(3-4x)$)는 표 5.9에 나타난 바와 같이 두 집단에 대한 Levene의 등분산 검정결과 F=450.989, p<0.05로 나타났으므로 두 집단간에 분산이 같다고 할 수 없다. 그러므로 등분산이 가정되지 않은 부분의 검정통계량을 사용하면 이때의 유의확률은 0.003으로 유의수준 5%보다 작다. 따라서 유의수준 5%하에서 두 집단간의 차이가 존재한다. 그러므로 문제 14에서는 교사와 학생간의 정답률에 차이가 있음을 가정할 수 있다.

문제 15($\frac{1}{3}x+2x=14$)는 표 5.9에 나타난 바와 같이 두 집단에 대한 Levene의 등분산 검정결과 F=1456.740, p<0.05로 나타났으므로 두 집단간에 분산이 같다고 할 수 없다. 그러므로 등분산이 가정되지 않은 부분의 검정통계량을 사용하면 이때의 유의확률은 0.003으로 유의수준 5%보다 작다. 따라서 유의수준 5%하에서 두 집단간의 차이가 존재한다. 그러므로 문제 15에서는 교사와 학생간의 정답률에 차이가 있음을 가정할 수 있다.

문제 16($0.9x+1=0.6x+7$)은 표 5.9에 나타난 바와 같이 두 집단에 대한 Levene의 등분산 검정결과 F=256.886, p<0.05로 나타났으므로 두 집단간에 분산이 같다고 할 수 없다. 그러므로 등분산이 가정되지 않은 부분의 검정통계량을 사용하면 이때의 유의확률은 0.016으로 유의수준 5%보다 작다. 따라서 유의수준 5%하에서 두 집단간의 차이가 존재한다. 그러므로 문제 16에서는 교사와 학생간의 정답률에 차이가 있음을 가정할 수 있다.

문제 18($5+3x=13+7x$)은 표 5.9에 나타난 바와 같이 두 집단에 대한 Levene의 등분산 검정결과 F=359.197, $p<0.05$로 나타났으므로 두 집단간에 분산이 같다고 할 수 없다. 그러므로 등분산이 가정되지 않은 부분의 검정통계량을 사용하면 이때의 유의확률은 0.020으로 유의수준 5%보다 작다. 따라서 유의수준 5%하에서 두 집단간의 차이가 존재한다. 그러므로 문제 18에서는 교사와 학생간의 정답률에 차이가 있음을 가정할 수 있다.

문제 20($\frac{1}{2}x+4=3x+3$)은 표 5.9에 나타난 바와 같이 두 집단에 대한 Levene의 등분산 검정결과 F=931.866, $p<0.05$로 나타났으므로 두 집단간에 분산이 같다고 할 수 없다. 그러므로 등분산이 가정되지 않은 부분의 검정통계량을 사용하면 이때의 유의확률은 0.000으로 유의수준 5%보다 작다. 따라서 유의수준 5%하에서 두 집단간의 차이가 존재한다. 그러므로 문제 20에서는 교사와 학생간의 정답률에 차이가 있음을 가정할 수 있다.

(4) 연구문제 4.

일차방정식에서 교사가 예상한 정답률은 근무 연한에 따라 차이가 있는가? 문제유형과 교사의 근무 연한에 따라 교사가 예상한 정답률은 달라지는가?

교사의 근무 연한에 따른 문제유형별 예상정답률의 평균 및 표준편차는 다음 표 5.9에 정리하였다.

문제	3년미만			3년이상- 5년미만			5년이상-10년미만			10년이상		
	평균	표준편차	학생수	평균	표준편차	학생수	평균	표준편차	학생수	평균	표준편차	학생수
1	81.05	9.94	19	85.00	11.55	7	84.71	8.30	7	85.82	7.86	57
2	68.16	12.04	19	75.43	16.16	7	77.14	8.09	7	76.37	9.71	57
3	62.47	14.45	19	66.57	17.84	7	68.14	8.07	7	66.54	13.61	57
4	55.79	15.75	19	57.57	21.82	7	57.14	16.29	7	54.49	55.21	57
5	52.53	16.70	19	55.43	23.55	7	52.14	15.77	7	51.09	18.84	57
6	74.21	9.08	19	77.43	17.78	7	79.29	9.32	7	78.75	9.90	57
7	62.37	15.40	19	61.86	23.89	7	66.43	12.49	7	66.75	13.68	57
8	55.42	15.60	19	63.29	23.89	7	64.29	15.39	7	62.16	12.90	57
9	46.68	18.27	19	48.29	22.71	7	36.43	26.57	7	44.26	21.04	57
10	71.16	11.71	19	75.14	16.44	7	77.71	9.74	7	77.65	10.63	57
11	48.11	16.48	19	50.29	23.18	7	50.71	18.35	7	47.05	20.62	57
12	51.63	12.97	19	54.14	22.48	7	59.29	10.18	7	54.16	17.57	57
13	53.68	14.24	19	59.00	21.26	7	62.86	13.50	7	59.04	16.48	57
14	56.95	14.73	19	64.29	22.44	7	65.43	9.29	7	61.44	14.56	57
15	59.47	14.06	19	65.14	17.42	7	64.29	10.18	7	61.74	13.92	57
16	57.16	12.23	19	66.43	13.14	7	66.43	13.14	7	61.11	13.29	57
17	70.26	14.91	19	74.57	24.96	7	80.00	8.16	7	75.40	13.09	57
18	68.21	13.49	19	73.71	13.60	7	75.00	8.66	7	73.25	11.85	57
19	64.21	15.95	19	66.00	19.07	7	68.29	9.95	7	66.74	13.39	57
20	57.00	16.50	19	59.00	23.60	7	62.86	11.50	7	60.75	14.57	57
평균	60.83	16.62	19	64.93	21.38	7	65.93	16.49	7	64.23	18.14	57

표 5.9 교사의 근무 연한에 따른 문제유형별 예상정답률의 평균 및 표준편차

위의 표 5.9에서 알 수 있듯이 일차방정식에서 교사의 근무 연한에 따른 문제유형별 예상정답률은 근무 연한이 3년미만인 교사의 경우 평균이 60.83, 표준편차가 16.62이었고, 근무 연한이 3년이상~5년미만인 교사의 경우 평균이 64.93, 표준편차가 21.38로 나타났다. 그리고 근무 연한이 5년이상~10년미만인 교사의 경우 평균이 65.93, 표준편차가 16.49이고, 근무 연한이 10년이상인 교사의 경우 평균이 64.23, 표준편차가 18.14로 나타났다.

본 연구문제를 검증하기 위해 4집단(근무년수 3년미만, 3년이상-5년미만, 5년이상-10년미만, 10년이상)과 20문제를 변수로 교사들의 예상정답률에 대한

4×20 이원배치 분산분석(two-way ANOVA)을 사용하였다. 이 때 종속변수는 교사의 예상정답률로 하고, 요인은 근무 연한(4)과 문제(20)로 하였다.

일차방정식에서 교사가 예상한 정답률은 근무 연한에 따라 차이가 있는지 그리고, 문제유형과 교사의 근무 연한에 따라 교사가 예상한 정답률은 달라지는지를 검토하기 위해 이원배치 분산분석을 적용한 결과이다.

		제곱합 (SS)	자유도 (df)	평균제곱 (MS)	F	유의확률 (p)
주효과	(결합)	93548.294	22	4252.195	18.937	.000
	근무연한	4362.570	3	1454.190	6.476	.000
	문제	89185.726	19	4693.986	20.904	.000
상호작용	근무연한*문제	4136.928	57	72.578	.323	1.000
모형		198897.0	79	2517.684	11.212	.000
잔차		386223.4	1720	224.548		
전체		585120.4	1799	325.248		

표 5.10 문제유형과 교사의 근무 연한별 예상정답률에 관한 분산분석 결과

표 5.10에서 나타난 바와 같이 모형의 유의확률은 0.000이므로 정답률에 대한 이원배치 분산분석 모형은 유의수준 5% 이내에서 타당한 것으로 판단할 수 있다. 즉, 이원배치 모형의 종속변수인 정답률의 변화를 두 개의 요인 및 상호작용으로 설명할 수 있다는 결론을 내릴 수 있다.

그리고 근무 연한과 문제의 이 두 요인이 복합적으로 작용하여 정답률에 영향을 주는가를 알아보기 위한 상호작용(Interaction)의 검정결과를 보면 유의확률이 1.000으로 유의수준 5%이내에서 두 요인사이의 의미있는 상호작용은 발견되지 않았다.

주요인으로 먼저 근무 연한을 살펴보면 근무 연한의 유의확률은 0.000으로 유의수준 5%보다 작으므로 유의수준 5% 이내에서 근무 연한에 따라 교사의 예상정답률에는 차이가 있음을 가정할 수 있다. 주요인으로 문제를 살펴보면

유의확률 0.000으로 유의수준 5%보다 작다. 그러므로 문제유형에 따라 교사의 예상정답률은 차이가 있음을 가정할 수 있다.

표 5.10에서 근무 연한에 따라 교사의 예상정답률에는 차이가 있음을 가정할 수 있었는데 이를 Duncan의 다중비교를 통하여 사후분석한 결과는 표 5.11과 같다.

근무 연한	교사수×20	Subset for alpha = .05	
		1	2
3년 미만	380	60.83	
3년 이상 - 5년 미만	1140		64.23
5년 이상 - 10년 미만	140		64.93
10년 이상	140		65.93
유의확률		1.000	0.348

표 5.11 교사들의 근무 연한별 예상정답률에 대한 Duncan의 다중비교 결과

표 5.11에서 의하면 근무 연한에 따른 교사들의 예상정답률은 2가지 그룹으로 나누어진다는 것을 알 수 있다.

- 첫 번째 그룹 - 근무 연한이 3년 미만인 교사들
- 두 번째 그룹 - 근무 연한이 3년이상~5년미만, 5년이상~10년미만, 10년이상인 교사들

Duncan의 다중비교 결과, 첫 번째 그룹은 두 번째 그룹에 속한 근무 연한에 해당하는 교사들 사이에서는 유의수준 5% 이내에서 의미있는 차이가 있다고 말할 수 있다. 그러나 두 번째 그룹에서 유의확률이 0.348로 0.05보다 크므로 그룹 내에 있는 근무 연한에 해당하는 교사들 사이에서는 유의수준 5% 이내에서 의미있는 차이가 있다고 가정할 수 없다. 학생들의 평균정답률이 60.71%이므로 근무 연한이 3년 미만인 교사가 예상한 정답률과 가장 가까움을 알 수 있다.

Ⅵ. 결론 및 논의

1. 요약

본 연구의 목적은 일차방정식에서 방정식의 문제유형에 대한 학생들의 실제정답률과 교사가 인지한 예상정답률 사이에 차이가 있는지 조사하여, 만약 차이가 있다면 주로 어떤 문제유형에 관한 것이었는지 찾아보고 그 문제유형을 분석하여 앞으로의 방정식 지도에 있어서 참고자료로 활용하고자 하는 것이다.

연구의 목적을 달성하기 위하여 다음과 같은 연구 문제를 설정하였다.

1. 일차방정식의 문제유형에 따라 중학생들의 정답률이 차이가 있는가?
2. 일차방정식에서 교사들이 예상한 중학생들의 정답률이 문제유형에 따라 차이가 있는가?
3. 일차방정식에서 교사가 예상한 정답률과 학생의 실제 정답률 사이에 차이가 있는가? 교사, 학생 모두에게 있어서 정답률이 문제유형별로 차이가 있는가? 또, 정답률에 있어서 교사, 학생과 문제유형 사이에 상호 관련이 있는가?
4. 일차방정식에서 교사가 예상한 정답률은 근무 연한에 따라 차이가 있는가? 문제유형과 교사의 근무 연한에 따라 교사가 예상한 정답률은 달라지는가?

연구 문제를 달성하기 위하여 서울과 경기 지역에 위치한 중학교에 재학 중인 2학년 학생 329명을 대상으로 학생용 검사지(검사지 B)를 실시하고, 현직 교사 90명을 대상으로 교사용 검사지(검사지 A)를 실시하였다.

검사 도구는 본 연구자가 중학교 1학년의 방정식 단원에서 제시된 내용을 토대로 교과서의 순서에 따라 유형별로 분류하고 재배열하여 제작하였다.

교사용 검사지(검사지 A)는 교사들을 대상으로 하여 일차방정식의 각 문제유형에 대하여 교사가 예상한 정답률을 쓰도록 하기위해 제작하여 사용하였다. 교사용 검사지는 근무 연한에 따라 4가지로 분류하였다.

학생용 검사지(검사지 B)는 학생들을 대상으로 일차방정식의 풀이과정과 답을 쓰도록 하여 정답률을 조사하기 위해 제작하여 사용하였다. 학생용 검사지는 다음과 같은 기준에 따라 채점하였다. ① 3점 : 정확한 과정을 통해 정답을 구한 경우 ② 2점 : 풀이 과정에 오류가 없으나 계산상 답이 틀린 경우 ③ 1점 : 풀이 과정이 대체로 바르지 못했으나 해를 구한 경우 또는 풀이 과정 없이 해를 구한 경우 ④ 0점 : 풀이를 시도하였으나 답을 구하지 못한 경우, 문제 풀이를 시도하지 않은 경우. 한 문제당 3점으로 하여 총 60점을 만점으로 하였다.

자료의 통계처리는 연구문제 1과 2를 위해서는 빈도분석, 일원배치 분산분석, Duncan의 다중비교를 사용하였다. 연구문제 3은 2×20 이원배치 분산분석을 사용하고 각 문제유형에 따라 교사, 학생 모두에게 있어서 정답률에 차이가 있는지 검증하기 위해 독립표본 t-검정을 하였다. 연구문제 4는 빈도분석과 4×20 이원배치 분산분석을 사용하였다. 이상의 모든 자료 분석은 개인용 컴퓨터의 윈도우용 통계 패키지인 SPSS(Statistical Package for the Social Science)를 이용하여 처리하였다.

결과 분석에 의해 얻어진 내용을 요약하면 다음과 같다.

첫째, 일차방정식의 문제유형에 따라 중학생들의 정답률이 차이가 있는지 조사한 결과, 유의수준 5% 이내에서 일차방정식 풀이에 대한 학생들의 정답률은 문제유형에 따라 차이가 있음을 가정할 수 있다.

둘째, 일차방정식에서 교사들이 예상한 중학생들의 정답률이 문제유형에 따라 차이가 있는지 조사한 결과, 유의수준 5% 이내에서 교사들이 예상한 중학생들의 정답률은 문제유형에 따라 차이가 있음을 가정할 수 있다.

셋째, 일차방정식에서 교사가 예상한 정답률과 학생의 실제 정답률은 차이가 있음을 가정할 수 있고, 문제유형에 따라 차이가 있음을 가정할 수 있다. 또, 표 5.7에 의하면 정답률에 관하여 대상(교사와 학생)과 문제의 상호작용은 F=1.565(df=19, p=0.055)로 0.5에 매우 근사하므로 문제유형별 교사와 학생간의 정답률에 대한 t-검정을 하였는데, 그 결과 교사와 학생간의 정답률은 문제4, 문제5, 문제8, 문제14, 문제15, 문제16, 문제18, 문제20의 총 8문제에서 차이가 있다는 결과가 나왔다.

넷째, 유의수준 5% 이내에서 일차방정식에서 교사가 예상한 정답률은 근무 연한에 따라 차이가 있음을 가정할 수 있고, 문제유형과 교사의 근무 연한에 따라 교사가 예상한 정답률은 달라진다는 것을 가정할 수 있다.

2. 논의

(1) 연구결과에 대한 논의

가. 연구문제 1

일차방정식의 문제유형에 따라 중학생들의 정답률이 차이가 있는지 조사한 결과, 유의수준 5% 이내에서 일차방정식 풀이에 대한 학생들의 정답률은

문제유형에 따라 차이가 있음을 가정할 수 있었다. 최고 정답률을 보인 문제는 방정식의 문제 1($2x+3=5$)로 이 문제는 계수가 양의 정수이고 상수도 양의 정수이다. 최저 정답률을 보인 문제는 문제 9($\frac{-2x-1}{5}-\frac{-3x+5}{2}=5$)로 전체부호가 (±)인 $\frac{(\text{일차식})}{(\text{상수})}$ 형태 두 개가 혼합된 방정식이었다.

방정식의 기본형인 문제 1($2x+3=5$)은 문제 6($15=6x-3$)처럼 계수가 양의 정수이고 x항이 오른쪽에만 있는 방정식과 유의수준 5% 이내에서 의미있는 차이가 나타나지 않았다. 즉 학생들은 x항이 왼쪽에만 있는 방정식과 x항이 오른쪽에만 있는 방정식에 의미있는 차이를 보이지 않았다.

문제 4($-\frac{1}{3}x+1=2x+\frac{1}{5}$)는 문제 12($\frac{1}{3}x-2=\frac{1}{5}x+4$), 문제 13($-2x+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$)과 유의수준 5% 이내에서 의미있는 차이가 있음을 가정할 수 있었다. 그리고 문제 12와 문제 13은 유의수준 5% 이내에서 의미있는 차이가 나타나지 않았다. 이는 학생들이 계수만 분수인 방정식과 상수만 분수인 방정식을 풀 때 받아들이는 어려움은 서로간에 의미있는 차이가 없지만 계수와 상수에 분수가 섞여 있는 방정식은 이보다 더 어려워한다는 것을 가정할 수 있다.

문제 1($2x+3=5$)은 문제 10($-3x+2=5$)과 유의 수준 5% 이내에서 학생들의 정답률에 차이가 있음을 가정할 수 있었다. 이는 계수의 부호에 따라 학생들의 정답률이 달라질 수 있음을 가정하고 있다. 다시 말하면 계수가 양의 정수인 문제유형을 계수가 음의 정수인 문제유형보다 더 쉽게 해결함을 가정하고 있다.

문제 10($-3x+2=5$)은 문제 17($-5y+3=13$)과 유의 수준 5% 이내에서 학생들의 정답률에 차이가 나타나지 않았다. 이는 교과서에서 제시되고 있는 방정식의 미지수가 대부분 x로 표기되고 있지만 학생들은 y나 z같은 문자로 나타내는 경우도 있다는 것을 받아들이고 있음을 가정할 수 있다.

문제 10($-3x+2=5$)은 문제 13($-2x+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$)과 유의 수준 5% 이내에서 학생들의 정답률에 차이가 있음을 가정할 수 있었다. 이는 상수가 정수인 문제유형을 상수가 유리수인 문제유형보다 더 쉽게 해결함을 가정하고 있다.

문제 15($\frac{1}{3}x+2x=14$)는 문제 7($8=-2(-4x+16)$), 문제 18($5+3x=13+7x$), 문제 8($0.1x-0.04=0.16$), 문제 16($0.9x+1=0.6x+7$) 그리고 문제 19 ($3x-7=-2(-x+6)$)와 유의수준 5% 이내에서 의미있는 차이가 있음을 가정할 수 있었다. 즉 학생들은 정수계수와 분수계수가 혼합된 방정식을 음의 정수의 분배법칙을 해야하는 방정식이나 계수가 정수인 방정식 그리고 계수가 소수인 방정식 보다 좀더 어려워함을 가정할 수 있었다.

문제 7($8=-2(-4x+16)$)과 문제 19($3x-7=-2(-x+6)$)는 유의수준 5% 이내에서 의미있는 차이가 나타나지 않았다. 두 문제에서 문제 19가 좀더 복잡해 보이지만 학생들은 두 문제의 풀이에서 의미있는 정답률의 차이를 보이지 않았음을 알 수 있는데 이는 문제 7을 풀 수 있는 학생의 경우 왼쪽에 x항이 하나 들어가도 문제 풀이에 별다른 영향을 받지 않음을 가정할 수 있다.

그리고 학생들은 문제 4($-\frac{1}{3}x+1=2x+\frac{1}{5}$), 문제 5($\frac{x+3}{4}=\frac{2}{3}x+2$), 문제 9($\frac{-2x-1}{5}-\frac{-3x+5}{2}=5$)처럼 분수가 들어간 방정식을 어려워하였다. 대체적으로 학생들은 분수가 들어간 방정식의 경우 적절한 수를 곱하여 분수가 있는 식을 정수가 있는 식으로 바꾸어 계산하기보다는 분수끼리 직접 계산하는 것을 선호하고 있었는데 이로 인하여 식이 복잡해져서 더 많은 실수와 오류를 범하고 있었다.

나. 연구문제 2

일차방정식에서 교사들이 예상한 중학생들의 정답률은 문제유형에 따라

차이가 있는지 조사한 결과, 유의수준 5% 이내에서 교사들이 예상한 중학생들의 정답률은 문제유형에 따라 차이가 있음을 가정할 수 있었다. 교사들이 예상한 최고 정답률을 보인 문제는 방정식의 문제 1($2x+3=5$)이고 최저 정답률을 보인 문제는 문제 9($\frac{-2x-1}{5}-\frac{-3x+5}{2}=5$)로 학생들과 동일하였다.

교사들의 예상정답률에서 문제 1($2x+3=5$)과 문제 6($15=6x-3$)이 유의수준 5% 이내에서 의미있는 차이가 있음을 가정할 수 있었다. 즉 교사들은 x항이 왼쪽에만 있는 방정식이 x항이 오른쪽에만 있는 방정식보다 학생들의 정답률이 더 높을 것이라고 인지하고 있음을 가정할 수 있다. 하지만 학생들의 실제 정답률에서는 문제 1과 문제 6에 의미있는 차이가 나타나지 않았다.

문제 4($-\frac{1}{3}x+1=2x+\frac{1}{5}$), 문제 12($\frac{1}{3}x-2=\frac{1}{5}x+4$) 그리고 문제 13 ($-2x+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$)은 유의수준 5% 이내에서 의미있는 차이가 나타나지 않았다. 즉 교사들은 이 세 문제에서 학생들의 정답률에 의미있는 차이는 없을 것이라고 인지하고 있음을 가정할 수 있다. 이는 교사들이 계수만 분수이거나 상수만 분수인 것 그리고 계수와 상수에 분수가 섞인 방정식간에 의미있는 차이가 없을 것이라고 인지하고 있음을 가정할 수 있다. 하지만 학생들의 실제 정답률에서는 문제 12와 문제 13는 유의수준 5% 이내에서 의미있는 차이가 나타나지 않았지만 문제 4는 문제 12, 문제 13과 의미있는 차이가 있는 것으로 가정할 수 있었다.

문제 1($2x+3=5$)은 문제 10($-3x+2=5$)과 유의 수준 5% 이내에서 교사들의 예상정답률에 차이가 있음을 가정할 수 있었다. 이는 계수의 부호에 따라 학생들의 정답률이 달라질 것이라고 교사가 인지하고 있음을 가정하고 있다. 다시 말하면 계수가 양의 정수인 문제유형을 계수가 음의 정수인 문제유형보다 더 쉽게 해결함을 가정하고 있다.

문제 10($-3x+2=5$)과 문제 17($-5y+3=13$)은 유의 수준 5% 이내에서 교

사들의 예상정답률에 의미있는 차이가 나타나지 않았다. 즉 교사는 미지수의 문자가 달라져도 학생들의 정답률에 의미있는 차이는 없을 것이라고 인지하고 있음을 가정할 수 있다. 학생들 역시 미지수의 문자가 x일 때와 y일 때 정답률에 있어서 의미있는 차이를 보이지 않았는데 이와 동일한 결과임을 알 수 있다.

문제 10($-3x+2=5$)은 문제 13($-2x+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$)과 유의 수준 5% 이내에서 교사들의 예상정답률에 차이가 있음을 가정할 수 있었다. 이는 상수가 정수인 문제유형을 상수가 유리수인 문제유형보다 더 쉽게 해결함을 가정하고 있다. 이는 연구문제 1에서 학생들의 실제 정답률의 결과와 동일함을 가정할 수 있다.

문제 15($\frac{1}{3}x+2x=14$)는 문제 18($5+3x=13+7x$)과 유의수준 5% 이내에서 의미있는 차이가 있음을 가정할 수 있었다. 이는 교사가 학생들이 정수계수와 분수계수가 혼합된 방정식을 정수계수만 있는 방정식보다 좀더 어려워할 것이라고 예상하고 있다고 가정할 수 있다. 이는 연구문제 1에서 학생들의 실제 정답률의 결과와 동일함을 가정할 수 있다.

문제 15($\frac{1}{3}x+2x=14$)는 문제 7($8=-2(-4x+16)$), 문제 8($0.1x-0.04=0.16$), 문제 16($0.9x+1=0.6x+7$) 그리고 문제 19($3x-7=-2(-x+6)$)와 유의수준 5% 이내에서 의미있는 차이가 나타나지 않았다. 즉 교사들은 정수계수와 분수계수가 혼합된 방정식이 음의 정수의 분배법칙을 해야하는 방정식이나 계수가 소수인 방정식과 학생들의 정답률에서 의미있는 차이가 있을 것이라고 보지 않았음을 가정할 수 있다. 하지만 학생들의 실제 정답률에서 문제 15를 문제 7이나 문제 8 그리고 문제 16보다 더 어려워함을 가정할 수 있었고 이는 교사들이 인지한 것과는 차이가 있음을 알 수 있다. 그리고 교사들은 문제 7과 문제 19에서 문제 19가 좀더 복잡해 보이지만 학생들은 두 문제의 풀이에서 의

미있는 정답률의 차이를 보이지 않을 것이라고 예상하였는데 이는 연구문제 1에서 학생들의 실제 정답률의 결과와 동일함을 가정할 수 있다.

다. 연구문제 3

일차방정식에서 교사가 예상한 정답률과 학생의 실제 정답률은 차이가 있음을 가정할 수 있고, 문제유형에 따라 차이가 있음을 가정할 수 있었다. 또, 표 5.7에 의하면 정답률에 관하여 대상(교사와 학생)과 문제의 상호작용은 F=1.565(df=19, p=0.055)로 유의확률 0.5에 매우 근사하므로 문제유형별 교사와 학생간의 정답률에 대한 t-검정을 하였다. 그 결과 교사와 학생간의 정답률은 문제4, 문제5, 문제8, 문제14, 문제15, 문제16, 문제18, 문제20의 총 8문제에서 차이가 있다는 결과가 나왔다.

문제 4($-\frac{1}{3}x+1=2x+\frac{1}{5}$)는 교사들이 예상한 정답률이 55.21%이었는데 학생들의 실제 정답률은 42.65%이었다. 교사들은 이 문제가 6번째로 어려울 것이라고 인지하였으나 실제 학생들은 2번째로 많은 오답을 하였다. 이는 계수와 상수에 분수가 섞여 있는 문제를 계수에만 분수가 있는 문제(예를들면 문제 12) 혹은 상수에만 분수가 있는 문제(예를들면 문제 13)보다 어려워함을 인지하지 못하였기 때문이라고 가정할 수 있다. 교사들은 이런 세 유형의 문제 풀이에서 의미있는 차이가 있을 것이라고 인지하지 않았음을 가정할 수 있다. 실제로 학생들은 문제 12와 문제 13간에는 의미있는 정답률의 차이가 없었던 것에 비해 문제 4와 문제 12, 문제 4와 문제 13간에는 의미있는 차이가 있었다.

문제 5($\frac{x+3}{4}=\frac{2}{3}x+2$)는 교사들이 예상한 정답률이 51.81%이었는데 학생들의 실제 정답률은 44.17%이었다. 교사들은 이 문제가 3번째로 어려울 것이라고 인지하였는데 마찬가지로 학생들 역시 3번째로 어려워하였다. 교사와 학

생 모두 문제 9번($\frac{(일차식)}{(상수)}-\frac{(일차식)}{(상수)}=(상수)$)을 가장 어려운 문제로 받아들였는데 문제 5와 문제 9의 정답률에 관해서는 서로 차이가 있다. 교사는 문제 5와 문제 9 사이에 의미있는 차이가 있을 것이라고 인지하였으나 실제 학생들의 정답률을 사후 분석한 결과 의미있는 차이는 나타나지 않음을 가정할 수 있었다. 즉 교사는 문제 9가 문제 5보다 어렵다고 인지하고 있지만 학생들은 두 문제를 모두 어려워하고 의미있는 차이를 느끼지 못함을 가정할 수 있다.

문제 8($0.1x-0.04=0.16$)은 계수와 상수가 모두 소수이고 자리수가 다른 방정식이다. 교사들이 예상한 정답률은 60.99%이었고 학생들의 실제 정답률은 73.15%이었다. 교사들은 이 문제가 8번째로 어려울 것이라고 인지하였으나 실제 학생들은 16번째로 많은 오답을 하였다. 즉 학생들은 이 문제를 5번째로 쉽게 받아들였다. 정답률에서 12.16의 차이가 나타났고 교사가 예상한 난이도의 순서와도 많은 차이가 있었다. 교사가 예상한 것보다 학생들은 이 문제를 훨씬 쉽게 풀었음을 알 수 있다.

문제 16($0.9x+1=0.6x+7$)은 계수가 같은 자리수의 소수이고 상수는 정수인 방정식이다. 교사들이 예상한 정답률은 61.10%이었고 학생들의 실제 정답률은 68.09%이었다. 교사들은 이 문제가 10번째로 어려울 것이라고 인지하였으나 실제 학생들은 14번째로 어려워하였다. 소수가 들어간 유형의 문제 8과 교사와 학생모두 (예상)정답률에 있어 의미있는 차이는 나타나지 않음을 가정할 수 있었다. 그러나 특이한 점은 교사들은 학생들이 이 문제를 문제 8보다 더 쉽게 풀 것이라고 인지하였지만 학생들은 반대로 문제 8을 더 쉽게 풀었다는 것이다.

문제 14($3(4-3x)=4(3-4x)$)는 양의 정수의 분배법칙이 나오는 형태의 문제로 풀이과정 중에 $7x=0$이나 $-7x=0$이 나오는 문제이다. 교사들이 예상한 정답률은 61.02%이었고 학생들의 실제 정답률은 52.18%이었다. 교사들은 이 문제가 9번째로 어려울 것이라고 인지하였으나 실제 학생들은 7번째로 어려워

하였다. 대부분의 학생들이 분배법칙을 잘 적용하여 푼 후 $7x=0$이나 $-7x=0$의 풀이 단계에서 해를 구하지 못하였다. 교사들은 문제 14가 분배법칙이 나오는 문제 예를들면 문제 3($4(x+1)-(3x-5)=0$)이나 문제 7($8=-2(-4x+16)$)과 의미있는 차이가 없을 것이라고 인지하였지만 학생들의 정답률을 사후분석한 결과 문제 3이나 문제 7과 의미있는 차이가 있음을 가정할 수 있었다. 실제 학생들이 분배법칙을 잘 해결하고 $7x=0$이나 $-7x=0$에서 풀지 못한 것을 볼 때 교사들이 분배법칙에만 촛점을 두고 $7x=0$이나 $-7x=0$에서 학생의 어려움에 관하여 미처 예측하지 못하였음을 가정할 수 있다.

문제 15($\frac{1}{3}x+2x=14$)는 분수계수와 정수계수가 혼합된 형태의 방정식이다. 교사들이 예상한 정답률은 61.72%이었고 학생들의 실제 정답률은 52.58%이었다. 교사들은 이 문제가 11번째로 어려울 것이라고 인지하였으나 실제 학생들은 9번째로 어려워하였다. 교사들은 분수계수만 있는 형태의 방정식 예를 들면 문제 12($\frac{1}{3}x-2=\frac{1}{5}x+4$)가 문제 15와 의미있는 차이가 있을 것이라고 인지하였고 문제 12가 더 어려울 것이라고 예상하였다. 그러나 학생들은 문제 12와 문제 15사이에 의미있는 차이가 나타나지 않음을 가정할 수 있었다. 여기에서 교사와 학생간의 인식의 차이가 나타나고 있음을 가정할 수 있다.

문제 18($5+3x=13+7x$)은 양변에 상수가 x항 앞에 더해진 일차식이 있는 방정식으로 상수와 계수 모두 정수이다. 교사들이 예상한 정답률은 72.36%이었고 학생들의 실제 정답률은 65.75%이었다. 교사들은 이 문제가 6번째로 쉬울 것이라고 예상하였으나 실제 학생들은 10번째로 쉽게 해결하였다. 교사들은 문제 18이 분배법칙이 들어간 방정식 예를 들면 문제 3($x+17=-3x+1$), 문제 7($8=-2(-4x+16)$), 문제 19($3x-7=-2(-x+6)$)보다 더 쉬울 것이라고 예상하였다. 그러나 학생들은 이런 문제들과 의미있는 차이가 나타나지 않았다.

따라서 학생들이 분배법칙을 비교적 잘 이해하고 있다고 가정할 수 있고 이로 인하여 교사와 학생간의 (예상)정답률에 차이가 있었음을 추측할 수 있다.

문제 20($\frac{1}{2}x+4=3x+3$)은 계수가 분수와 정수인 x항이 양변에 포함되어 있고 상수는 정수인 방정식이다. 교사들이 예상한 정답률은 59.99%이었고 학생들의 실제 정답률은 47.72%이었다. 교사들은 이 문제가 7번째로 어려울 것이라고 예상하였으나 실제 학생들은 5번째로 어려워하였다. 교사들은 분수계수만 있는 형태의 방정식 예를들면 문제 12($\frac{1}{3}x-2=\frac{1}{5}x+4$)가 문제 20과 의미있는 차이가 있을 것이라고 인지하고 문제 12가 더 어려울 것이라고 예상하였다. 그러나 학생들은 문제 12와 문제 20사이에 의미있는 차이가 나타나지 않음을 가정할 수 있었다. 교사는 분수계수만 있는 방정식(예를들어 문제 12)나 상수가 분수인 방정식(예를들면 문제 13)이 문제 20보다는 더 어려울 것이라고 인지하였으나 학생들이 오류를 많이 범한 순위로 볼 때 문제 12나 문제 13보다는 문제 20에서 더 많은 오류를 범하였는데 이 차이로 인하여 문제 20에서 교사와 학생의 (예상)정답률에 차이가 있었음을 가정할 수 있다.

라. 연구문제 4

일차방정식에서 교사가 예상한 정답률은 근무 연한에 따라 차이가 있음을 가정할 수 있고, 문제유형과 교사의 근무 연한에 따라 교사가 예상한 정답률은 달라진다는 것을 가정할 수 있었다. 근무 연한에 따라 교사의 예상정답률이 달라지는 것에 대하여 Duncan의 다중비교를 통하여 사후분석한 결과 근무 연한이 3년미만인 교사와 3년이상~5년미만, 5년이상~10년미만, 10년이상의 두 그룹으로 나누어졌는데 근무 연한이 3년미만인 교사들의 예상정답률이 60.83으로 학생들의 실제 정답률 60.71과 가장 근접하였다.

근무 연한이 비교적 짧은 교사들이 인지한 예상정답률이 학생들의 실제

정답률과 가장 근접한 이유는 두 가지로 추측할 수 있다. 첫째는 현재 학교에 재학 중인 학생들이 과거에 비해 수학능력이 부족함을 근무 연한이 풍부한 교사가 아직 인지하지 못하고 있거나 근무 연한이 3년이상인 교사들의 학생에 대한 기대치가 높기 때문으로 추측할 수 있다. 둘째는 본 연구의 검사지에서 현재 교사가 가르치고 있는 학년과 최근 몇 년 내에 중학교 1학년을 가르쳤는지에 대한 것을 조사하여 따로 분류하여 검사하지 않았으므로 그로 인한 제한점으로 생각할 수도 있다. 실제로 현재 교사가 가르치고 있는 학년의 학생들의 정답률을 더 잘 파악하고 있을 것이고, 또 최근 몇년 내에 어떤 학년을 가르쳤느냐에 따라 또 인지하게 되는 정답률은 달라질 수 있는데, 근무연한이 3년 미만인 교사의 경우 중학교 1학년을 담당하는 경우가 많기 때문이다.

(2) 방정식 풀이에 나타난 오류 분석

본 장에서는 일차방정식의 풀이에서 학생들이 범한 오류를 소개하고 분석하고자 한다. 학생들이 범한 오류는 크게 6가지로 분류할 수 있는데 그것은 다음과 같다.

가. 답란에 $x=$(수)라고 쓰지 않고 (수)라고 답을 한 오류

학생용 검사지(검사지 B)는 일차방정식의 풀이와 답을 모두 쓰도록 하기 위해 그림 4.2처럼 구성하였는데 본 연구에 참여한 학생 329명 중 159명 즉 48.33%의 학생들이 답란에 $x=$(수)의 꼴로 쓰지않고 (수)라고 쓰는 오류를 범하였다(B-15번, B-29번 등). 학생들은 등식의 성질을 이용하여 풀이를 한 후에 답을 쓸 때는 $x=$(수)라고 해야할지 (수)만을 답으로 써야할지 망설이거나 $x=$(수)와 (수) 모두 정답이라고 인식한 듯하다. 이것은 초등학교 저학년에서 □가 들어간 식을 계산한 후 답을 쓸 때 □=(수)로 쓰지 않고, (수)만을 표시

한 경험에 의한 것으로 추측된다. 초등학교 5학년 교과서에서 □대신 기호 x를 사용할 수 있다고 하였으므로 학생들은 답에 (수)를 쓰는 것이 자연스러울 수 있음을 추측할 수 있다.

1) $2x+3=5$
[풀이] $2x=5-3$
$2x=2$
$x=1$
[답] 1
(B-15 학생의 답안지)

3) $4(x+1)-(3x-5)=0$
[풀이]
$4x+4-3x+5=0$
$x=-4-5$
$x=-9$
[답] -9
(B-29 학생의 답안지)

그림 6.1 답란에 $x=$(수)라고 쓰지 않고 (수)라고 답을 한 오류

나. 방정식의 답을 일차식으로 표기한 오류

다음으로 발견된 오류는 답을 $x+3$과 같은 식으로 표현한 것으로 이런 식으로 답한 학생들은 전체의 10.64%였다(B-37번, B-47번 등). 이런 오류를 범한 학생들은 대부분 등호를 등식과 등식 사이에 사용하는 오류 뿐만아니라 방정식에 대한 기본적인 개념이 부족한 학생들이었다. 검사지 B-37번 학생은 $9x-6x=7-9$에서 답을 $3x-2$라고 하였다. 그리고 검사지 B-47번 학생의 경우 해를 $x=5$라고 구한 후 답란에는 $x-5$라고 썼고, 검사지 B-257번 학생의 경우 해를 $x=2$라고 구한 후 답란에는 $2x$라고 답을 썼다. 이 학생들은 다항식을 간단히 하는 것과 방정식 풀이의 차이점을 잘 이해하지 못하였기 때문에 이런 오류를 범했다고 추측할 수 있다.

16) $0.9x+1=0.6x+7$

[풀이]

[답]

(B-37 학생의 답안지)

7) $8=-2(-4x+16)$

[풀이]

[답]

(B-47 학생의 답안지)

2) $x+17=-3x+1$

[풀이]

[답]

8) $0.1x-0.04=0.16$

[풀이]

[답]

(B-257 학생의 답안지)

그림 6.2 방정식의 답을 일차식으로 표기한 오류

다. 등식과 등식 사이에 등호를 넣은 오류

다음으로 발견된 오류는 일차방정식의 풀이 과정에서 등식과 등식 사이에 등호를 넣은 것으로 329명 중 32명 즉 9.73%가 오류를 범하였다(B-103 등). 이것은 송영무, 양두례(1997)의 연구에서 나타났던 장애유형과 일치하는 것으로 등호에 대한 이해 부족에서 연유된 것으로 보인다. 예외적인 경우로 등식과 등식 사이에 등호 대신 화살표(⇒)를 넣은 학생도 있었다(B-281). 이 학생은 전후의 등식이 동치임을 표현하고자 한 것 같다.

10) $-3x+2=5$

[풀이] $-3x+2=5$

$=-3x+2-2=5-2$

$=-3x=3$

$=x=-1$

[답] $x=-1$

(B-103 학생의 답안지)

19) $3x-7=-2(-x+6)$

[풀이]

$3x-7=2x-12$

$\Rightarrow 3x-2x=-12+7$

$\Rightarrow x=-5$

[답] $x=-5$

(B-281 학생의 답안지)

그림 6.3 등식과 등식사이에 등호를 넣은 오류

라. $7x=0$에서 해를 구하지 못한 오류

문제 14는 $3(4-3x)=4(3-4x)$인데 분배법칙을 적용한 후 $-7x=0$ 혹은 $7x=0$까지는 올바른 풀이를 하고 여기서 풀이를 하지 못하는 경우가 전체의 9.42%였다. 문제 14에서 학생들은 해가 없다고 답하거나(B-4번, B-302번 등), $x=7$(B-20번, B-321번 등), $7x$(B-12번 등), $\frac{0}{7}$(B-69번 등), ?(B-213번) 등으로 답하고 있다. 학생들의 답 중에서 $x=7$이라고 답한 학생은 $-7x=0$까지 올바른 풀이를 한 후 이런 답을 썼는데, 이것은 이창근(1987)이 그의 연구에서 곱셈과 덧셈의 차이점을 이해하지 못한 학생들이 $-5x=0$의 근을 $x=5$라고 답하였다고 언급한 것과 같은 맥락으로 해석된다. 그 밖의 학생들은 0을 7로 나눈다는 것에 대한 인지적 어려움을 겪고 있다고 추측된다.

14) $3(4-3x)=4(3-4x)$

[풀이]

$12-9x=12-16x$

$-9x+16=12-12$

$7x=0$

[답] 없다

(B-4 학생의 답안지)

14) $3(4-3x)=4(3-4x)$

[풀이]

$12-9x=12-16x$

$7x=0$

[답] 해는 없다

(B-302 학생의 답안지)

14) $3(4-3x)=4(3-4x)$

[풀이]

$12-9x=12-16x$

$-9x+16x=12-12$

$7x=0$

$x=7$

[답] $x=7$

(B-20 학생의 답안지)

14) $3(4-3x)=4(3-4x)$

[풀이]

$12-9x=12-16x$

$\therefore x=7$

[답] $x=7$

(B-321 학생의 답안지)

14) $3(4-3x)=4(3-4x)$

[풀이] $12-9x=12-16x$

$12-12=-16x+9x$

$0=7x$

[답] $7x$

(B-12 학생의 답안지)

14) $3(4-3x)=4(3-4x)$

[풀이]

$12-9x=12-16x$

$-9x+16x=12-12$

$7x=0$

$x=\frac{0}{7}$

[답] $x=\frac{0}{7}$

(B-69 학생의 답안지)

14) $3(4-3x)=4(3-4x)$

[풀이]

$12-9x=12-16x$

$-9x+16x=12-12$

$7x=0$

[답] ?

(B-213 학생의 답안지)

그림 6.4 $7x=0$에서 해를 구하지 못한 오류

마. 곱셈의 역연산에 대한 개념의 부족으로 인한 오류

문제 14번처럼 올바른 풀이를 한 후에 $4x=-16$와 같은 단계에서 x값을 구하지 못하였다. 문제 14번을 제외한 상태에서 이런 어려움을 겪은 학생들은 전체의 2.43%에 해당된다(B-249 등). 이 학생들은 곱셈의 역연산에 대한 개념의 부족으로 방정식의 해를 구하지 못한 것으로 추측된다. 이 학생들은 거의 모든 문제에서 이 이상의 단계를 넘지 못하였다.

18) $5+3x=13+7x$

[풀이]

$3x-7x=13-5$

$-4x=8.$

[답] $-4x=8$

(B-249 학생의 답안지)

그림 6.5 곱셈의 역연산에 대한 개념의 부족으로 인한 오류

바. 분수 개념에 대한 지식의 결여로 인한 오류

분수 개념에 대한 지식의 결여에 의한 것으로 $\frac{x-2}{3}$와 $\frac{1}{3}x-2$가 같다고 생각하는 오류(B-59), 등식의 성질에 대한 이해의 결여에 의한 것으로 $\frac{x+3}{4}=\frac{2}{3}x+2$을 $x+3=2x+6$으로 계산한 오류(B-23) 등이 있다.

12) $\frac{1}{3}x-2=\frac{1}{5}x+4$

[풀이] $15\left(\frac{x-2}{3}\right)=15\left(\frac{x+4}{5}\right)$

$5x-10=3x+12$

$5x-3x=+12+10$

$2x=22$ [답] $x=11$

(B-59 학생의 답안지)

5) $\frac{x+3}{4}=\frac{2}{3}x+2$

[풀이]

$x+3=2x+6$

$-x=3$

$x=-3$

[답] $x=-3$

(B-23 학생의 답안지)

그림 6.6 분수 개념에 대한 지식의 결여로 인한 오류

학생들이 범한 오류를 관찰하여 보면 학생들은 자기 나름대로 논리적인 이유로 식을 전개해 나가고 있음을 알 수 있다. 물론 기본적인 지식의 부족으로 인하여 상식적인 생각에 의존하거나 성급한 결론을 이끌어 내거나 또는 지나치게 일반화함으로써 오류를 범하지만 그들이 오류를 범한 과정이나 이유를 분석한다면 그들의 오개념을 교정하도록 지도하는데 좋은 참고가 될 수 있을 것이라고 생각한다.

3. 후속 연구를 위한 제언

1. 성적에 따른 상위·중위·하위 집단에서 교사와 학생이 인지하는 유형별 학습곤란도에 대한 차이에 관한 연구가 필요하다.

2. 학생들이 오류를 범하는 이유를 분석하여 교사가 이를 어떻게 지도해야 하는지에 관한 연구가 필요하다.

3. 학생의 문제유형별 오류와 학습곤란도를 교사가 파악한 후 방정식 단원을 수업했을 때 학습성취도에 어떤 영향을 미치는지에 대한 연구가 필요하다.

참 고 문 헌

교육부(1998). 『수학 1-1』, 대한교과서 주식회사

______(1998). 『수학 1-2』, 대한교과서 주식회사

______(1998). 『수학 2-1』, 대한교과서 주식회사

______(1998). 『수학 2-2』, 대한교과서 주식회사

교육부(2000). 『수학 3-1』, 대한교과서 주식회사

______(2000). 『수학 3-2』, 대한교과서 주식회사

______(2000). 『수학 4-1』, 대한교과서 주식회사

______(2000). 『수학 4-2』, 대한교과서 주식회사

______(2000). 『수학 5-1』, 대한교과서 주식회사

______(2000). 『수학 5-2』, 대한교과서 주식회사

______(2000). 『수학 6-1』, 대한교과서 주식회사

______(2000). 『수학 6-2』, 대한교과서 주식회사

교육부(1992). 『중학교 교육과정』, 대한교과서 주식회사

교육부(1994). 『중학교 수학과 교육 과정 해설』, 대한교과서 주식회사

구광조, 오변승, 류희찬 공역(1992). 『수학교육과정과 평가의 새로운 방향』, 경문사. Curriculum and Evaluatio Standards for School Mathematics. NCTM

김남희(1997). 『변수 개념의 교수학적 분석 및 학습-지도 방향 탐색』, 서

울대학교 대학원(박사학위논문)

김민성(1996). 『학생들이 지각한 '잘 가르치는 교사'의 수업행동』, 서울대학교 대학원 (석사학위논문)

김성준(1995). 『산수에서 대수로의 전이에 관한 고찰』, 서울대학교 대학원 (석사학위 논문)

김학구(1984). 『일차방정식의 풀이과정에 관한 오류분석과 그 대책』, 동국대학교 교육대학원(석사학위 논문)

김호우, 박교식, 신준국, 정은실(1994). 『중학교 수학 1』, 지학사

김희정(1997). 『교사의 의도된 질문이 수학 학습에 미치는 효과 - 중학교 1학년 평면 도형 지도를 중심으로 -』, 한국교원대학교 대학원(석사학위 논문)

류한영(1999). 『중학교 3학년과 고등학교 1학년들의 방정식에 대한 오류분석에 관한 연구』, 한국교원대학교 대학원(석사학위 논문)

박정란(1994). 『이차방정식의 풀이과정에서의 오류유형 조사 및 그 지도에 관한 연구』, 국민대학교 교육대학원(석사학위 논문)

송영무, 양두레(1997). 산술에서 대수로의 이행 과정에서 나타나는 장애에 관한 연구. 수학교육프로시딩 Vol 5

우정호(1998). 『학교 수학의 교육적 기초』, 서울대학교 출판부

이시연(1998). 『관계적 이해와 도구적 이해에 관한 중학교 수학1학년 교과서의 연구 분석』, 고려대학교 교육대학원(석사학위 논문)

이창근(1987). 『중등학교 수학교육에 있어서 방정식 지도에 관한 연구』, 한양대학교 교육대학원(석사학위 논문)

조덕주(1992). 『아동의 인식 내용 및 인식 구조에 대한 탐구』, 이화여자대

학교 대학원(박사학위 논문)

최영일(1987). 『방정식 해법에 있어서의 오류의 진단과 치료(중학교)』, 부산대학교 교육대학원(석사학위 논문)

한인기(1992). 중학교 대수 교육의 방향 모색, 『청람수학교육』, 제2집.(pp. 157-167). 한국교원대학교 수학교육연구소.

Chalouh, L. & Herscovics, N.(1988). "Teaching Algebraic Expressions in a Meaningful Way" In A. Coxford & A. Shulte. (eds). *The ideas of algebra, K-12. 1988 yearbook*. (pp.33-42). Reston, VA: NCTM

Kieran, C.(1988). "Equations and Expressions in Algebra" In A. Coxford & A. Shulte. (eds). *The ideas of algebra, K-12. 1988 yearbook*. (pp.91-96). Reston, VA: NCTM

Wagner, S. & Parker, S(1995). "Advancing Algebra" In P. S. Wilson(Ed.), *Reseach Ideas for the classroom : High school mathematics*(pp. 119-139), 대한수학교육학회 집중세미나(역), 수학교육연구주제2

-부록1-

<검사지 A>

지 시 문

선생님 안녕하십니까?

다음의 검사지는 효과적인 수학 교수 방법을 탐색하기 위한 연구의 일환으로 제작한 것입니다. 이 검사에 의한 자료는 연구의 목적 이외에는 사용하지 않을 것입니다.

바쁘시더라도 최선을 다하여 답해 주시면 감사하겠습니다.

건국대학교 교육대학원
김 진 아

◉ 본인의 근무 연한을 표시하여 주십시오

① 1년 미만 ② 1년 이상~3년 미만
③ 3년 이상~5년 미만 ④ 5년 이상~10년 미만
⑤ 10년 이상

<예상 정답률 쓰는 법>

1. $8x-3=13$ 답 : $x=2$

예상 정답률 : 75%

☞ 이 문항을 학생 100명 중 몇 명이 정답을 맞출 것이라고 생각하는지 그 수를 써주시면 됩니다. 위의 경우는 100명 중 75명은 정답을 맞출 것이라고 예상하였을 때의 경우입니다.

- 부록 1 -

♣ 중학교 2학년 학생들을 대상으로 다음과 같은 문제를 출제하였을 때, 각 문항에 대하여 선생님께서 생각하시는 예상 정답률을 써주십시오.

1) $2x+3=5$ 답 : $x=1$
예상정답률 :

2) $x+17=-3x+1$ 답 : $x=-4$
예상정답률 :

3) $4(x+1)-(3x-5)=0$ 답 : $x=-9$
예상정답률 :

4) $-\frac{1}{3}x+1=2x+\frac{1}{5}$ 답 : $x=\frac{12}{35}$
예상정답률 :

5) $\frac{x+3}{4}=\frac{2}{3}x+2$ 답 : $x=-3$
예상정답률 :

6) $15=6x-3$ 답 : $x=3$
예상정답률 :

7) $8=-2(-4x+16)$ 답 : $x=5$
예상정답률 :

8) $0.1x-0.04=0.16$ 답 : $x=2$
예상정답률 :

9) $\frac{-2x-1}{5}-\frac{-3x+5}{2}=5$

답 : $x=7$
예상정답률 :

10) $-3x+2=5$ 답 : $x=-1$
예상정답률 :

11) $\frac{-2x-4}{4}+\frac{x+5}{3}=1$ 답 : $x=-2$
예상정답률 :

12) $\frac{1}{3}x-2=\frac{1}{5}x+4$ 답 : $x=45$
예상정답률 :

13) $-2x+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$ 답 : $x=-\frac{1}{24}$
예상정답률 :

14) $3(4-3x)=4(3-4x)$ 답 : $x=0$
예상정답률 :

15) $\frac{1}{3}x+2x=14$ 답 : $x=6$
예상정답률 :

16) $0.9x+1=0.6x+7$ 답 : $x=20$
예상정답률 :

17) $-5y+3=13$ 답 : $y=-2$
예상정답률 :

18) $5+3x=13+7x$ 답 : $x=-2$
예상정답률 :

19) $3x-7=-2(-x+6)$ 답 : $x=-5$
예상정답률 :

20) $\frac{1}{2}x+4=3x+3$ 답 : $x=\frac{2}{5}$
예상정답률 :

-부록2-

<검사지 B>

지 시 문

여러분 안녕하십니까?

다음의 검사지는 효과적인 수학 교수 방법을 탐색하기 위한 연구의 일환으로 제작한 것입니다. 이 자료는 학교 성적이나 그 밖의 어떠한 평가에도 영향을 주지 않으며, 연구목적 이외에는 절대 사용하지 않을 것임을 약속드립니다.

할 수 있는 한 최선을 다하여 답해 주시면 감사하겠습니다.

건국대학교 교육대학원

김 진 아

==

중학교 제 2학년 반 번 성별: 남 / 여 이름:

==

♣ 다음 일차방정식의 풀이 과정과 답을 쓰시오.

1) $2x+3=5$
[풀이]

[답]

2) $x+17=-3x+1$
[풀이]

[답]

3) $4(x+1)-(3x-5)=0$
[풀이]

[답]

4) $-\frac{1}{3}x+1=2x+\frac{1}{5}$
[풀이]

[답]

5) $\frac{x+3}{4}=\frac{2}{3}x+2$
[풀이]

[답]

6) $15=6x-3$
[풀이]

[답]

7) $8=-2(-4x+16)$
[풀이]

[답]

8) $0.1x-0.04=0.16$
[풀이]

[답]

9) $\frac{-2x-1}{5}-\frac{-3x+5}{2}=5$
[풀이]

[답]

10) $-3x+2=5$
[풀이]

[답]

11) $\frac{-2x-4}{4}+\frac{x+5}{3}=1$
[풀이]

[답]

16) $0.9x+1=0.6x+7$
[풀이]

[답]

12) $\frac{1}{3}x-2=\frac{1}{5}x+4$
[풀이]

[답]

17) $-5y+3=13$
[풀이]

[답]

13) $-2x+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$
[풀이]

[답]

18) $5+3x=13+7x$
[풀이]

[답]

14) $3(4-3x)=4(3-4x)$
[풀이]

[답]

19) $3x-7=-2(-x+6)$
[풀이]

[답]

15) $\frac{1}{3}x+2x=14$
[풀이]

[답]

20) $\frac{1}{2}x+4=3x+3$
[풀이]

[답]